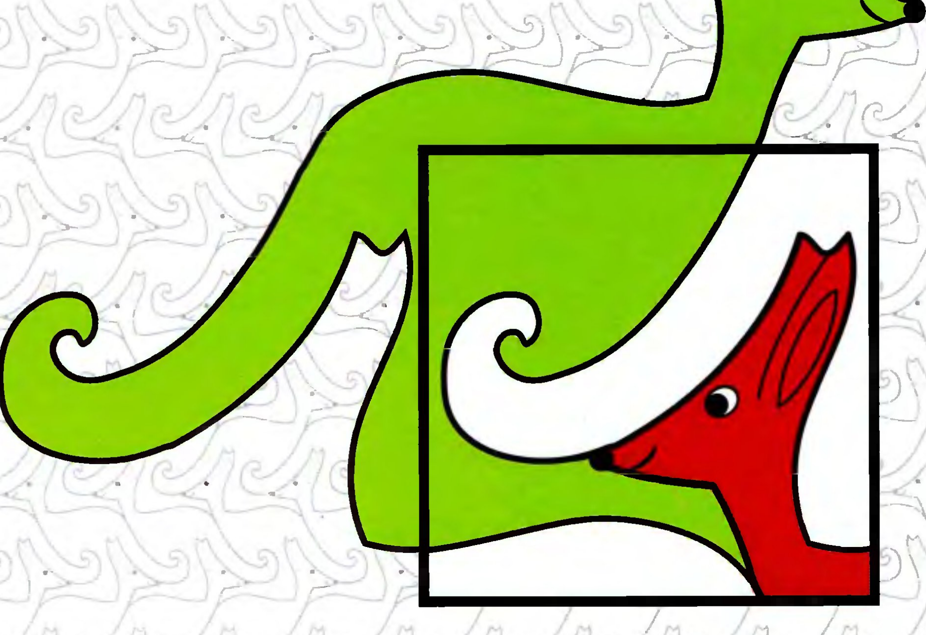
A. Deledicq, C. Missenard



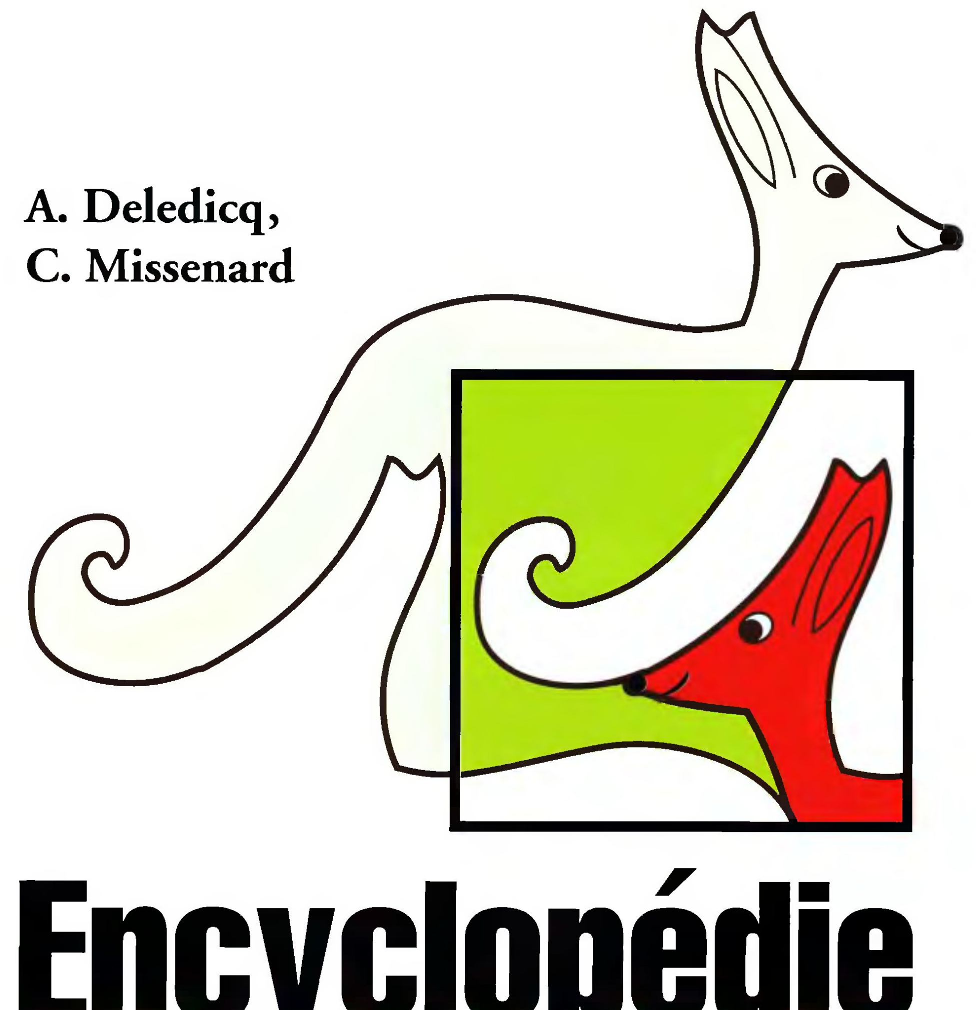
Encyclopédie Kangourou

des mathématiques au collège

2ème édition

ACL – Les Éditions du Kangourou

A. Deledicq,
C. Missenard



Encyclopédie Kangourou

des mathématiques au collège

Cette **Encyclopédie Kangourou** est un outil de travail...

... pour les élèves de quatrième et de troisième qui veulent bien connaître **ce qu'il leur faut savoir**, en mathématiques, **à la sortie du collège**.

... pour les élèves de seconde qui souhaitent disposer d'un véritable **livre de référence** où ils trouveront ce qu'ils ont peut-être oublié ou mal compris.

- N'hésitez jamais à consulter l'**index** : c'est l'**entrée principale** de toute encyclopédie.

- Ce qu'il faut comprendre, savoir ou savoir faire en fin de collège est ici présenté en 16 thèmes réunissant plus de 250 "écrans" présentant toutes **les définitions, propriétés et savoir-faire utiles** ; des **exemples-types** et **des situations de présentation** articulent ces savoirs avec la pratique quotidienne.

Dans les marges de multiples exercices complètent cette liaison des mathématiques avec **la culture générale et la vie de tous les jours**. Toutes les questions sont précédées d'un carré rouge et corrigées à la fin du livre.

À la fin de chaque thème un **test** permet de s'auto-évaluer.

- Tout au long de la lecture ou de la consultation de cette encyclopédie, on verra que l'esprit "Kangourou" sait allier le sérieux avec un brin de **malice**.

Outil de travail, certes mais "outil de plaisir" aussi (pour l'esprit bien sûr) et "outil de réflexion".

Les **pages magazine**, à la fin de chaque thème, montrent aussi comment les mathématiques se sont construites pour être ouvertes au monde...

Et s'il suffisait de **s'intéresser aux mathématiques** pour qu'elles deviennent tout simplement **faciles** ?

Encyclopédie Kangourou des mathématiques au collège
Deuxième édition

12, rue de l'Épée de Bois - Paris
Novembre 1998
ISBN : 2-87694-026-4

PAO : ACL - Les Éditions du Kangourou
Imprimé en France par B.L.G./Toul

Sommaire

Nombres et algèbre

Géométrie

Suppléments

Sommaire des pages d'entrée et des pages magazine

THÈME

1

Des cailloux aux calculs

« Dieu a créé les nombres entiers, tout le reste est l'œuvre de l'homme. », disait le mathématicien ***Kronecker.***

Cette œuvre peut paraître assez disparate : les fractions, la racine de deux, le nombre π, les nombres négatifs…

Quel est donc le lien qui unit tous les nombres au sein d'une même famille ? À l'heure où les programmes scolaires utilisent tacitement toutes sortes de nombres, ce que nous révélons ici peut vous aider à clarifier vos idées sur ce thème fondamental.

Les nombres

Pendant longtemps, on a représenté les objets ou les animaux à compter par des petits *cailloux* qui se manipulaient plus facilement que les choses qu'ils représentaient ; c'est l'origine du mot ***calcul*** (en latin *caillou* se disait ***calculus***).

Nombres entiers

Au bout de ses mains, le bébé homme découvre ses dix doigts, dont le nombre servira de base à notre système de numération.
Plus tard, ces premiers nombres s'enrichiront d'un "signe" : les entiers "naturels" et leurs opposés composent la famille des entiers relatifs.

Pour mesurer plus finement

Bien adaptés pour ce que l'on peut compter (le "dénombrable"), les entiers ne suffisent pas pour d'autres types de grandeurs : longueurs, masses, temps… Il faut alors subdiviser l'unité. Décimaux et écritures fractionnaires en sont issus.

Toujours plus fin

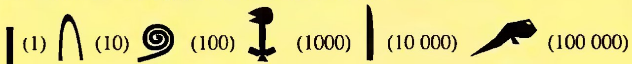
Certaines longueurs sont restées réfractaires à toute mesure par des fractions. Il a fallu imaginer de nouveaux nombres : les "réels".

L'écriture des nombres

On a retrouvé, près de Memphis, en Égypte du Sud, une stèle datant de plus de 3000 ans av. J.-C. On y reconnaît l'écriture de deux nombres représentant peut-être l'effectif d'un troupeau de canards : les nombres 111200 et 121023.



Les "chiffres" des égyptiens ressemblaient en effet à ceci :



256 s'écrivait alors 𓍢𓍢 ∩∩∩∩∩ |||||| . Pour le même nombre 256 :

- Les babyloniens (qui se servaient de la base 60) écrivaient ainsi : ⁞⁞ < ⁞⁞⁞
- Les grecs utilisaient des lettres (H pour *hekaton*, cent, Δ pour *delta*, dix, Γ pour *pente*, cinq) : H H ͲΓ I
- Les romains aussi utilisaient des lettres : C C L V I
- Et les hindous inventèrent des chiffres dont on retrouve un peu la forme chez les arabes, puis chez nous : २५६



La base deux est utilisée en électronique et en informatique parce que les deux chiffres 0 et 1 modélisent les deux états d'un circuit électrique : le courant passe ou ne passe pas.

NOMBRES ENTIERS

1. 1 Écriture en base dix

Les *nombres entiers naturels* (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13,...) sont en nombre infini.

Un système astucieux (la numération de position à base dix) nous permet de les écrire tous avec seulement 10 symboles (les chiffres). En voici le principe :

Chaque chiffre a dix fois plus de "poids" que le chiffre situé immédiatement à sa droite.

EXEMPLE

12 345 = 1 × 10 000 + 2 × 1 000 + 3 × 100 + 4 × 10 + 5 × 1

504 = 5 × 100 + 0 × 10 + 4 × 1

La grande découverte fut l'invention du **zéro** pour marquer l'absence de certaines puissances de dix (des dizaines dans l'exemple 504). On attribue l'invention de cette notation aux hindous, au début de notre ère.

On a choisi de regrouper par paquet de dix les unités, puis ces paquets eux-mêmes et ainsi de suite. Mais, d'autres choix sont possibles. Par exemple, on peut décider de regrouper en paquets de deux unités pour faire une unité de la colonne suivante. C'est la base "deux". Avantage : on n'a besoin que de deux chiffres pour écrire tous les nombres. Contrepartie : les nombres ont vite un grand nombre de chiffres.

EXEMPLE

Un nombre s'écrit en base deux $\overline{101\,110}$. Cela signifie qu'en base dix il s'écrira 1 × 32 + 0 × 16 + 1 × 8 + 1 × 4 + 1 × 2 + 0 × 1 = 46.

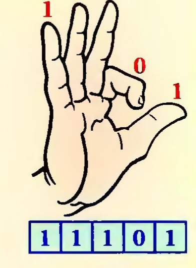
1. 2 La base deux

Tous les dispositifs susceptibles de prendre deux positions ou deux états sont bien adaptés à la représentation des nombres écrits en base deux. Les doigts d'une main pouvant être chacun levé ("1") ou baissé ("0") permettent ainsi de compter de 0 à 31.

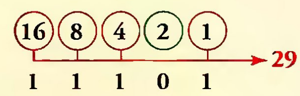
Voici par exemple, deux écritures "binaires" du nombre 29.

À chaque doigt est associée une puissance de deux.

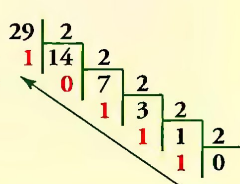
À chaque position de chiffre est associée une puissance de deux.



Pratiquement, pour passer de la base deux à la base dix, on ajoute les puissances de deux correspondant aux chiffres "1" de l'écriture du nombre :



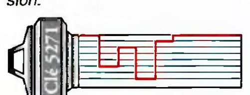
Et pour passer de la base dix à la base deux, on effectue des divisions successives par deux : les restes donnent la suite des chiffres (à l'envers).



Base huit

Pour faire une clé, on pratique des incisions d'une certaine profondeur sur une ébauche.

On sait couramment pratiquer huit profondeurs distinctes sur une incision.



Avec quatre incisions au plus, combien peut-on réaliser de clés différentes ?

12 – 9 = 3

9 – 12 = – 3

Dans l'ensemble des nombres entiers relatifs, toutes les équations du type ***a + x = b*** *ont une solution.*



Le lion est mort ce soir

Dans la réserve de Wagalulululu, il y a 235 lions, 243 anti-lions, 120 anti-anti-lions, 350 anti-anti-anti-lions, 120 anti-anti-anti-anti-lions et 84 anti-anti-anti-anti-anti-lions.

Quel est le nombre de lions ?



La soustraction était bien malheureuse dans l'ensemble des entiers naturels. Une fois sur deux, elle était une opération impossible ! Alors, pour la consoler, on a inventé un nouvel ensemble de nombres où toutes les soustractions étaient faisables. Il a suffit d'adjoindre aux entiers naturels de nouveaux nombres écrits comme les anciens mais précédés d'un signe "moins".

1. 3 Le vocabulaire des relatifs

Les entiers naturels (0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4...) sont les nombres relatifs positifs.

On peut les écrire précédés d'un signe + et entourés de parenthèses.

EXEMPLE : (+ 7) = 7.

Les nombres 0 ; – 1 ; – 2 ; – 3 ; – 4... sont des nombres relatifs négatifs.

On peut les entourer de parenthèses.

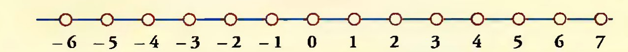
EXEMPLE : (– 7).

Les entiers relatifs 3 et (– 3) sont des nombres opposés ; leur somme est nulle.

L'opposé d'un nombre relatif ***a*** **se note –** ***a*** **ou (–** ***a*****).**

1. 4 Représenter les relatifs

Des points graduant régulièrement une droite donnent une bonne image de l'ensemble des entiers relatifs.



1. 5 Pratique des nombres relatifs

Les nombres négatifs représentent des quantités analogues aux nombres positifs mais considérés dans un autre "sens". Pour chaque situation, ce "sens" doit être précisé. Voici deux exemples.

Crédit/Débit

Le caissier d'un magasin note dans la colonne "crédit" toutes les sommes qui lui sont données : et il note dans la colonne "débit" toutes les sommes qu'il verse à des clients.

a) Quel est le "bilan" de la journée ?

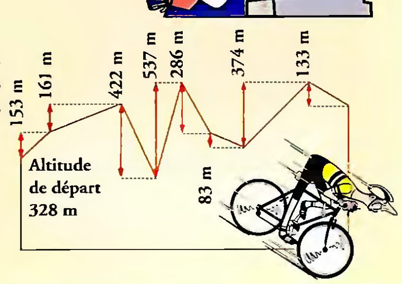
b) Sachant qu'il avait 500 F dans la caisse au début, quel calcul doit-il effectuer pour savoir combien il a dans la caisse à la fin ?

Crédit	Débit
325 F	243 F
120 F	350 F
84 F	120 F

Étape de montagne

Voici le profil d'une étape du tour de France sur lequel les dénivellations sont indiquées en rouge.

Calculer l'altitude d'arrivée.



500	328
+ 325	+ 153
– 243	+ 161
+ 120	– 422
– 350	+ 537
– 120	– 286
+ 84	– 83
?	+ 374
	– 133
	?



POUR MESURER PLUS FINEMENT

Pour pouvoir mesurer des grandeurs avec une précision plus fine que l'unité, on a eu l'idée d'écrire d'autres chiffres à droite du chiffre des unités. Un séparateur placé juste à sa droite (la "virgule" ou le "point décimal") permet de repérer la place du chiffre des unités ; après la virgule chaque chiffre a dix fois moins de "poids" que son voisin de gauche.

EXEMPLE

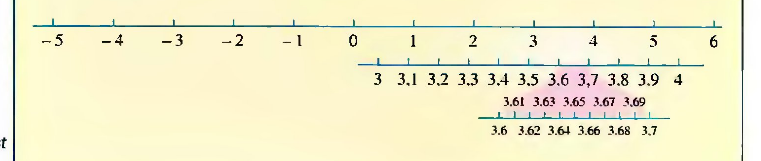
$47{,}851 = 47$ unités 8 dixièmes 5 centièmes 1 millième $= 47 + \frac{8}{10} + \frac{5}{100} + \frac{1}{1000}$.

Les dixièmes, centièmes, millièmes sont le résultat de la subdivision de l'unité en dix, cent, mille…

1. 6 Nombres décimaux

Les nombres décimaux sont les nombres égaux au quotient d'un entier par une puissance de 10.

Voici une image de "zooms" successifs dans l'ensemble des nombres décimaux :



En réduisant au plus grand dénominateur l'écriture

$$47 + \frac{8}{10} + \frac{5}{100} + \frac{1}{1\,000}$$

sous la forme

$$\frac{47\,851}{1\,000}$$

on s'aperçoit qu'un nombre décimal est simplement le quotient d'un entier par une puissance de dix.

1. 7 La Disme de Simon Stevin

À partir du XIVe siècle, les « astrologues, arpenteurs, mesureurs de tapisserie, maîtres de monnaies, marchands et autres stéréométreurs » apprirent le système de numération arabe et la manière de faire les opérations.

Voici comment en 1585 dans un livre intitulé *La Disme*, l'ingénieur hollandais Simon Stevin leur expliquait l'usage des nombres décimaux.

DÉFINITION I

Disme est une espèce d'arithmétique, inventée par la Dixième progression consistente es caractères des chiffres, par lesquels se décrit quelque nombre, et par laquelle l'on dépêche par nombres entiers sans rompus, tous comptes se rencontrant aux affaires des hommes.

DÉFINITION II

Tout nombre entier proposé se dit COMMENCEMENT, son signe est tel ⑩.

EXPLICATION

Par exemple nombre proposé de trois cent soixante-quatre COMMENCEMENTS, les descrivant en cette sorte 364⑩. Et ainsi de tous autres semblables.

DÉFINITION III

Et chaque dixième partie de l'unité du COMMENCEMENT nous la nommons PRIME, son signe est tel ① ; et chaque dixième partie de l'unité de prime nous la nommons SECONDE, son signe est tel ②. Et ainsi des autres chaque dixième partie, de l'unité de son signe précédent, toujours en l'ordre un davantage.

Explication

Comme 3①7②5③9④, c'est-à-dire 3 Prime 7 secondes 7 tierces 9 quartes ; et ainsi se pourrait procéder en infini. Mais pour dire de leur valeur, il est notoire, que selon cette définition, lesdits nombres font $\frac{3}{10}$ $\frac{7}{100}$ $\frac{5}{1000}$ $\frac{9}{10000}$, ensemble $\frac{3759}{10000}$. Semblablement 8⑩9①3②7③ valent 8 $\frac{9}{10}$ $\frac{3}{100}$ $\frac{7}{1000}$, ensemble $\frac{8937}{1000}$. Et ainsi d'autres semblables. Il faut aussi savoir que nous n'usons en la Disme d'aucuns nombres rompus, aussi que le nombre de multitude des signes, excepté 0, n'excède jamais le 9. Par exemple nous n'écrivons pas 7①12②, mais en leur lieu8①2②, car ils valent autant.



Illustration de couverture de l'édition de 1634 des livres de Stevin en français : "Celui qui cueille les fruits de la connaissance n'est jamais seul !".

1. 8 Fractions et nombres rationnels

Les nombres qui sont le quotient de deux entiers relatifs sont appelés les nombres rationnels.

Du coup, tous les résultats de divisions d'entiers sont des nombres rationnels. Et tous les rationnels peuvent s'écrire sous forme de fraction (quotient d'un entier par un entier).

EXEMPLES DE NOMBRES RATIONNELS :

$$\frac{1}{2}\ ;\ \frac{23}{100}\ ;\ \frac{10\,000}{1\,789}\ ;\ -\frac{1}{4}\ ;\ \frac{5}{1}.$$

En fait un même nombre rationnel peut s'écrire sous forme de fraction d'une infinité de façons, comme le montre l'énoncé ci-dessous.

Solutions d'une équation
Dans l'ensemble des nombres rationnels, toutes les équations du type $ax = b$ (avec $a \neq 0$ et où a et b sont des entiers) ont une solution.

1. 9 Simplification des écritures fractionnaires

Si k, a et b sont des entiers non nuls, alors :

$$\frac{ka}{kb} = \frac{a}{b}.$$

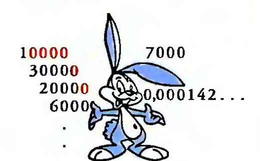
$\frac{5}{3} = \frac{10}{6} = \frac{15}{9} = \frac{20}{12} = \frac{25}{15} = \frac{30}{18} = \frac{35}{21}$
Que d'écritures pour un seul nombre !

1. 10 Écriture décimale, écriture fractionnaire

Les nombres entiers ont une écriture fractionnaire simple : $421 = \frac{421}{1}$.

Les nombres décimaux aussi : $5{,}173 = \frac{5\,173}{1\,000}$.

Recherche de décimale
■ ***Quelle est la 7 000e décimale du nombre $\frac{1}{7\,000}$?***



1. 11 La technique de division

À partir de l'écriture fractionnaire d'un nombre rationnel, la technique de la division permet de trouver une écriture décimale du même nombre.

Si la division "s'arrête", le rationnel est un nombre décimal. Il a une écriture décimale (finie).

C'est le cas du quotient $\frac{70}{4} = 17{,}5$.

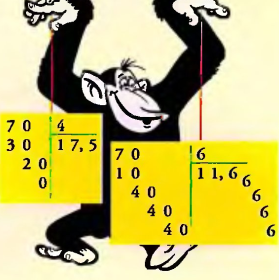
Si la division ne s'arrête pas, le rationnel n'est pas décimal. Il a une écriture décimale "illimitée", mais on peut remarquer que cette écriture est périodique (un chiffre ou une suite de chiffres s'y répète).

C'est le cas du quotient $\frac{70}{6}$.

$\frac{1}{4} = 0{,}25$ et $\frac{10}{3} = 3{,}333\,333\,333\,333\ldots$

Le nombre $\frac{1}{4}$ est décimal,

le nombre $\frac{10}{3}$ ne l'est pas.



Étonnant !
Les chiffres 1 4 2 8 5 7 se répètent indéfiniment dans l'écriture décimale du nombre $\frac{1}{7}$.
■ ***Cela peut-il expliquer les fantastiques résultats des multiplications suivantes ?***
142 857 × 7 = ?
142 857 × 6 = ?
142 857 × 5 = ?
142 857 × 4 = ?
142 857 × 3 = ?
142 857 × 2 = ?

1. 12 Points ayant une abscisse fractionnaire

● On veut placer sur une droite graduée les points d'abscisse fractionnaire.

EXEMPLE

B est le point d'abscisse 3/4. On partage l'unité en 4 (des quarts). B est le troisième des points marqués.

D est le point d'abscisse – 1/4. On partage le segment [– 1 ; 0] en 4 et D est le premier point marqué à partir de 0.

C est le point d'abscisse 11/3. $\frac{11}{3} = \frac{9}{3} + \frac{2}{3} = 3 + \frac{2}{3}$. On partage le segment [3 ; 4] en 3 (des tiers). C est le deuxième point ainsi marqué.

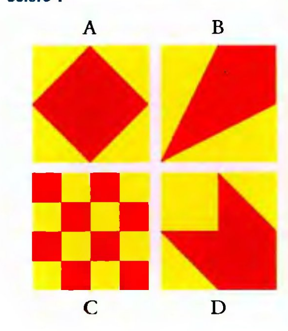
– 1   D O   B 1   2   3   C 4

– 1/4   3/4   11/3

Portions de carrés

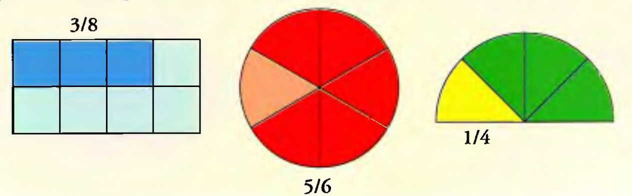
Voici quatre carrés coloriés.

Quelle fraction de chacun a été colorié en rouge et lequel est "le plus" coloré ?



D'autres représentations des fractions

● Les fractions interviennent dans toutes les situations de partage de grandeurs et d'aires en particulier. L'aire d'une certaine figure est prise comme unité. Cette figure est divisée en parties d'aires égales. Les aires des parties s'expriment alors en "fractions".



Laplace

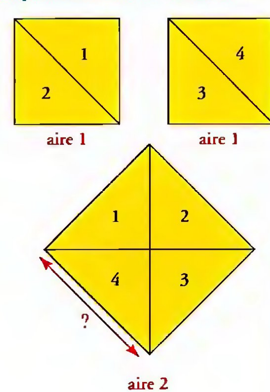
1. 13 Les discours de Laplace

Pour la grande histoire, on a conservé le discours de Laplace à l'École Normale, le 11 Floréal. An III. Il s'adressait aux citoyens-élèves de la toute nouvelle École Normale, qui allaient devoir répandre la Culture et la Science chez les instituteurs de la République. En voici un extrait :

« J'interromps aujourd'hui l'ordre des leçons de mathématiques pour vous entretenir du système des poids et mesures qui vient d'être définitivement décrété par la Convention nationale (...). On vous demande pour faire un habit deux aunes et un tiers de drap ; vous trouverez qu'un tiers, c'est trop, et vous ne prenez qu'un quart, mais vous n'avez pas une idée nette de combien un tiers est plus grand qu'un quart. Vous avez vu qu'il faut faire un certain calcul pour réduire ces fractions au même dénominateur ; notre esprit ne conçoit et ne compare facilement que les nombres fractionnaires dont le dénominateur est le même, parce qu'il regarde le dénominateur comme un tout dont il voit les différentes parties. Cet inconvénient n'a pas lieu dans l'arithmétique décimale car l'avantage des fractions décimales est d'avoir toujours le même dénominateur ou de pouvoir y être rapportées très aisément : de sorte que, depuis un jusqu'à dix, vous avez un seul dénominateur, et de même depuis 10 jusqu'à 100, et ainsi de suite, si on vous demande, par exemple, trois mètres et trois décimètres d'une étoffe, et que l'on trouve qu'il n'y en a pas assez, et on en prendra quatre ou cinq décimètres, etc.

Vous en éprouverez à le faire entendre aux instituteurs, qu'une longue habitude a familiarisé avec les anciennes mesures ; il leur paraîtra compliqué : car l'homme est naturellement porté à rejeter sur la complication des choses, la peine que ses préjugés et ses habitudes lui donnent à les concevoir ; mais votre zèle éclairé surmontera ces obstacles. »

Découpage de carrés
En découpant deux carrés de côté 1 (et donc d'aire 1) et en réassemblant les quatre morceaux comme ci-dessus, on obtient un carré d'aire 2.
Quel est le côté de ce carré ?



TOUJOURS PLUS FIN

Les choses s'étaient déjà bien arrangées depuis l'introduction des nombres rationnels. Mais il restait des équations sans solution, et ces équations, on les rencontrait dans des situations géométriques concrètes. Par exemple l'équation $x^2 = 2$. Sa solution est la longueur de la diagonale d'un carré de côté unité.
On sait démontrer depuis longtemps (la démonstration figure dans les *Éléments* d'Euclide) que la solution de cette équation n'est ni un nombre entier, ni le quotient de deux entiers (autrement dit pas un rationnel). Il faut donc se résoudre à accepter l'existence d'une nouvelle catégorie de nombres.

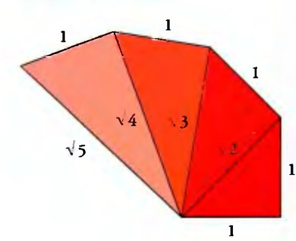
1.14 Les nombres réels

Il existe un ensemble de nombres, contenant tous les nombres précédemment connus (entiers, décimaux, rationnels) et des nouveaux nombres, solutions d'équations du type $x^2 = a$ avec a positif, ainsi que quelques autres qui seront évoqués plus loin.

Les mathématiciens ont appelé cet ensemble, l'ensemble des nombres réels.

Il reste dans l'ensemble des nombres réels des équations sans solution ; par exemple l'équation $x^2 = -1$.
On peut donc se douter que les réels seront un jour "plongés" dans un plus grand ensemble de nombres où toutes les équations auront des solutions. Mais ceci est pour un peu plus tard...

La spirale des racines



1.15 Les racines carrées

L'équation $x^2 = 2$ a deux solutions, opposées l'une de l'autre. On décide de désigner par l'écriture $\sqrt{2}$ celle des deux qui est positive (et par $-\sqrt{2}$ son opposée).

Plus généralement, si a est un nombre positif, l'écriture $\sqrt{a}$ désigne le nombre positif dont le carré est a et l'écriture $-\sqrt{a}$ le nombre négatif dont le carré est a.

Certaines racines carrées sont des nombres entiers, ou des nombres décimaux :

$$\sqrt{81} = 9 \; ; \; \sqrt{0.09} = 0.3 \; ; \; \sqrt{\frac{75}{27}} = \sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3}.$$

D'autres n'ont pas d'écriture plus simple que celle qui utilise le symbole $\sqrt{\ }$.
La calculatrice en donne une valeur approchée décimale : $\sqrt{2} = 1{,}414\,213\,526\,3\ldots$
Cette écriture décimale est illimitée et non périodique.

π intervient dans tous les objets ronds.



1.16 Le nombre π

Vous connaissez depuis longtemps, sans le savoir, un nombre réel, ni décimal, ni rationnel, ni solution d'aucune équation simple.
C'est le nombre π, coefficient de la proportionnalité qui lie le diamètre d'un cercle à sa longueur.
Ce nombre π a lui aussi une écriture décimale illimitée et non périodique dont un petit extrait figure en bas de la page suivante.

L'habit ne fait pas le moine

Ce n'est pas parce qu'il y a des racines dans l'écriture d'un nombre qu'il est irrationnel.
Regardez :

$$\sqrt{1\,024} \text{ et } \sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}-1}.$$

Ce n'est pas parce qu'il y a un quotient qu'un nombre n'est pas un entier.

Regardez : $\frac{102}{17}$ *et* $\frac{1\,001}{7 \times 11 \times 13}$.

Ce n'est pas parce que deux nombres sont proches l'un de l'autre qu'ils appartiennent à la même catégorie.

Regardez : $\frac{22}{7}$, π *et* $\frac{355}{113}$.

1.17 La droite graduée, image de l'ensemble des réels

Voici un point de vue qui peut vous éclairer sur ce que sont les nombres réels. Il s'exprime par une propriété qui relie cet ensemble de nombres à un ensemble géométrique familier, la droite et qui s'énonce ainsi :

Il y a "autant" de points sur une droite que de nombres réels, autrement dit, on peut, à tout point d'une droite associer un nombre réel et un seul. Une droite graduée est donc une représentation privilégiée de l'ensemble des nombres réels.

$\sqrt{2}$ $\sqrt{3}$ π
– 1 – 0,5 0 1 2 3
– 1/4 3/4 11/3

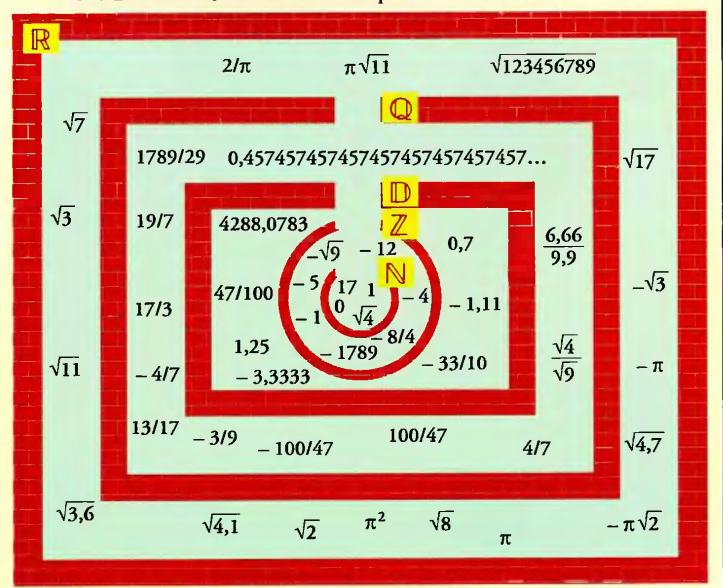
1.18 Un nom pour chaque ensemble de nombres

Les mathématiciens se sont mis d'accord sur quelques notations pour désigner les ensembles de nombres.

- $\mathbb{N}$ **: ensemble des entiers naturels**
- $\mathbb{Z}$ **: ensemble des entiers relatifs**
- $\mathbb{D}$ **: ensemble des décimaux relatifs**
- $\mathbb{Q}$ **: ensemble des rationnels**
- $\mathbb{R}$ **: ensemble des réels.**

1.19 Le zoo des nombres

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Voici une représentation ensembliste :



π = 3,141 592 653 589 793 238 462 643 383 279 502 884 197 169 399 375 105 820 974 944 592 307 816 406 296 208 996 628 034 825 342 117 062 982 148 086 513 282 306 647 093 844 699 550 582 231 725 359 408 128 481 174 502 841 027 019 385 211 055 596 446 ...

1.20 Un exemple-type : le périmètre d'une figure

Sur du papier quadrillé, on dispose d'une unité toute prête, le côté du carreau. Il est facile, alors, de mesurer des longueurs.

Et pourtant, cela devient vite plus compliqué qu'il n'y paraît.
Donnée : la figure ABCD ci-dessous.
Question : quel est le périmètre (en côté de carreau) de cette figure ?
Il faut évaluer des différents segments qui composent la figure, ainsi que la mesure du demi-cercle.

● Pour [AB], tout va bien. Le côté du carreau est reporté un nombre entier de fois pour composer le segment [AB]. C'est un problème de dénombrement : AB = 4 carreaux. La mesure de [AB] est un nombre **entier**.

● Pour [BC], il faut déjà un outil supplémentaire : il faut subdiviser les carreaux. On a besoin d'un nouveau type de nombre pour écrire cette mesure. On effectue un changement d'unité : on mesure en "demi-carreau" et selon qu'on est ou non d'origine anglo-saxonne, on écrit $BC = 5\frac{1}{2}$ carreaux ou $BC = \frac{11}{2}$ carreaux. La mesure de [BC] est le **quotient de deux nombres entiers**. On peut aussi utiliser une écriture à virgule de ce nombre et préférer écrire BC = 5,5 carreaux. La mesure de [BC] est aussi un nombre **décimal**.

● Pour le demi-cercle allant de C à D, on passe à une nouvelle famille de nombres : en effet le nombre de carreaux obtenus si on "dépliait" la ligne CD ne serait ni un entier, ni un décimal, ni un quotient d'entiers. C'est un nombre que les mathématiciens désignent par une lettre grecque : le nombre π. Le nombre π appartient à l'ensemble des nombres **réels**.

● Enfin [DA] lui non plus ne peut se mesurer en carreaux ni par un nombre entier, ni par un décimal, ni par un quotient d'entier.
La mesure de [DA] vérifie l'égalité $DA^2 = 2^2 + 5.5^2$, soit $DA^2 = 34.25$ (*voir Thème 10 : Le théorème de Pythagore*).
Le nombre dont le carré est 34,25 n'est ni entier, ni quotient d'entiers. On lui a inventé une écriture spécifique.
On écrit $DA = \sqrt{34,25}$ carreaux.
Ce nombre est lui aussi un nombre **réel**.

● Et pour obtenir le périmètre de la figure, il faut encore ajouter ces quatre résultats :
$4 + \frac{11}{2} + \pi + \sqrt{34.25}$.
Avec une calculatrice, on trouve une approximation du résultat avec deux décimales après la virgule (au centième près) : 18,49.

Demi-cercle

La longueur d'un demi-cercle de rayon r est $r \times \pi$. La longueur d'un demi-cercle de rayon 1 est $1 \times \pi$.

Dans cette situation :

- on a vu que des longueurs sont mesurées par des nombres "réels" de différentes catégories.
- on a rencontré des nombres entiers et décimaux et des nombres non rationnels.
- on a interprété, en terme de "périmètre", la somme de ces nombres de différents types.

LES MAINS SUR LA TABLE

Pour avoir le résultat d'une multiplication par 9, placer ses dix doigts devant soi ; le résultat 9 × n se voit en abaissant le nième doigt !

Voyez, par exemple, la troisième case du tableau ci-contre : 9 × 3. En abaissant le 3e doigt, on voit 2 doigts levés à gauche et 7 doigts levés à droite ; c'est le résultat : 27.

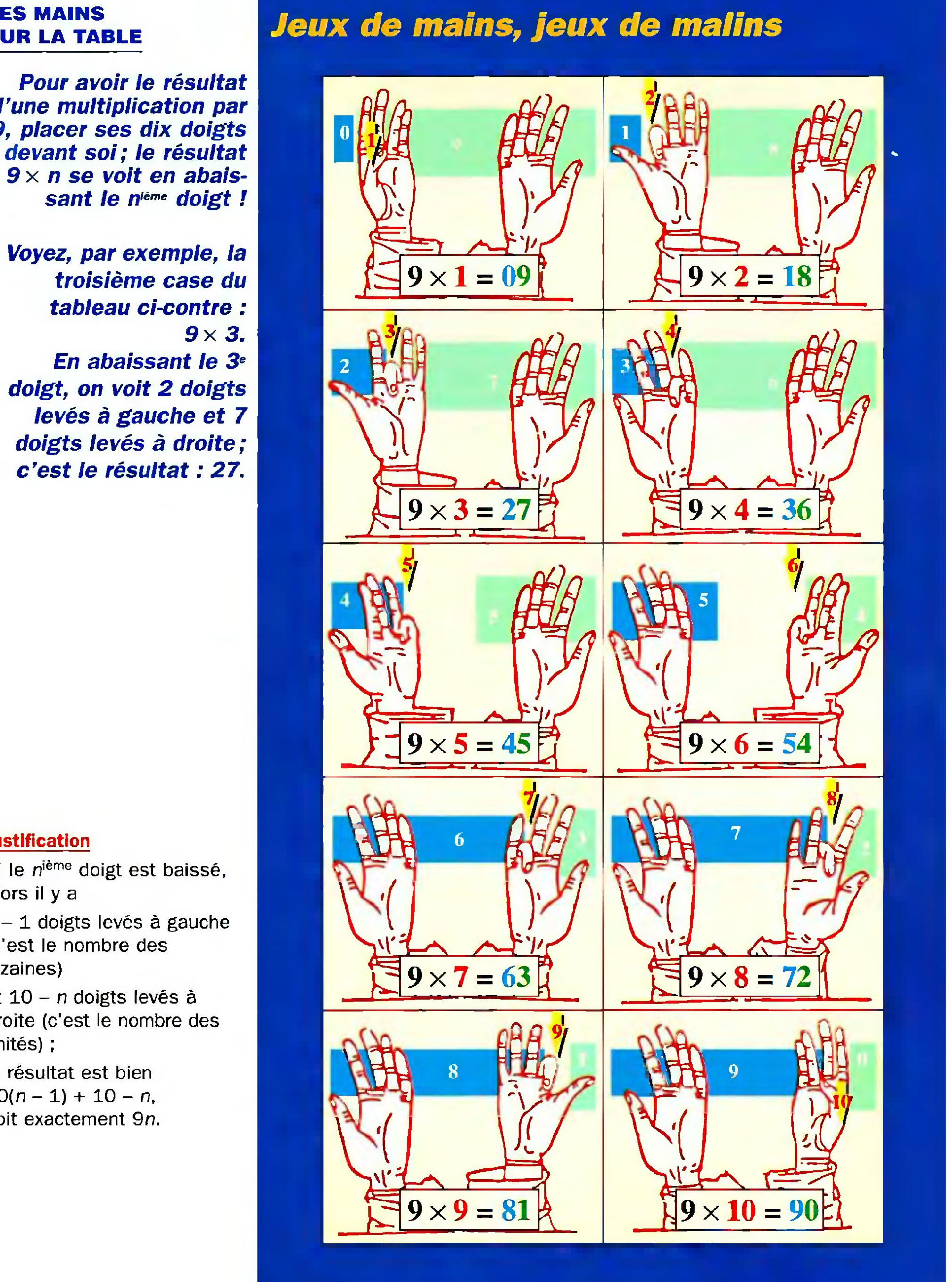
Justification

Si le $n^{\text{ième}}$ doigt est baissé, alors il y a

$n - 1$ doigts levés à gauche (c'est le nombre des dizaines)

et $10 - n$ doigts levés à droite (c'est le nombre des unités) ;

le résultat est bien $10(n - 1) + 10 - n$, soit exactement $9n$.



LA TABLE DE MULTIPLICATION SANS LE CŒUR NI LA TÊTE

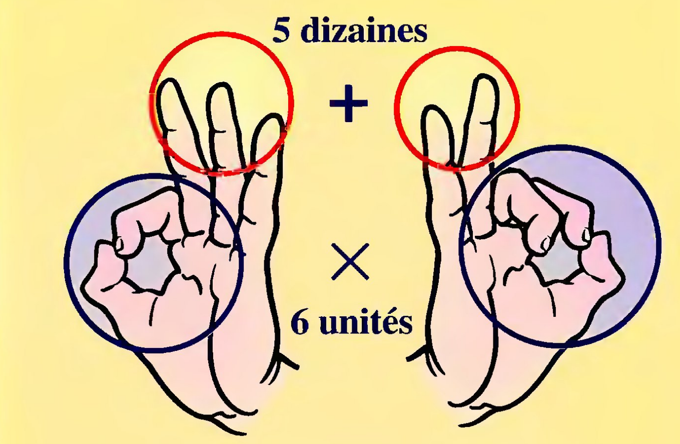
Pour ceux qui n'arrivent pas à se souvenir de leur table de multiplication, il existe un truc fabuleux : c'est l'algorithme des pieds et des mains. La légende prétend que Pythagore avait réussi à l'enseigner à un chimpanzé apprivoisé… Pourquoi ne pas l'apprendre vous aussi ?

L'algorithme des pieds et des mains

Combien font 8 × 7 ?

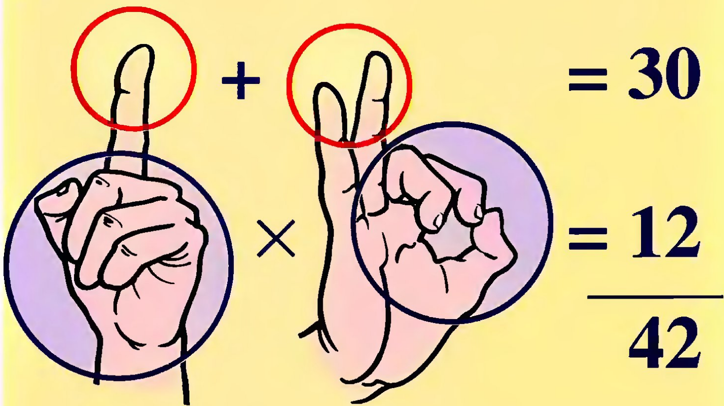
Avec les doigts de votre côté gauche, indiquez **8** (5 doigts de pied + 3 doigts levés de la main gauche).

Avec les doigts de votre côté droit, indiquez **7** (5 doigts de pied + 2 doigts levés de la main droite).



Et le résultat se lit sur les doigts de la main.
En additionnant les nombres de doigts levés, on obtient le chiffre des dizaines, ici 5.
En multipliant les nombres de doigts abaissés, on obtient le chiffre des unités, ici 6.
Et c'est vrai : **8 × 7 = 56 !**

Et 6 × 7 ?



Le plus intéressant est que ça marche pour tous les produits de facteurs entre 5 et 10.
Essayez-vous même, **6 × 6, 7 × 7, 8 × 8, 6 × 8, 5 × 7…**

Des pieds à la tête

Ce qui serait magnifique, c'est que vous arriviez à justifier cet algorithme de manière à expliquer pourquoi il marche dans tous les cas.
Il vous faut d'abord comprendre ce qu'il est nécessaire de démontrer :
le produit $(5 + a)(5 + b)$ est égal à $10(a + b) + (5 - a)(5 - b)$.
Ce n'est tout de même pas deux développements qui vont vous faire peur…

Test 1

Pour chacune des 10 questions, indiquer la ou les bonnes réponses parmi A, B, C, D ou E

	Questions	A	B	C	D	E
1	Parmi les cinq nombres suivants, -1, $\sqrt{2}-1$, $\sqrt{2-1}$, $\sqrt{2}$, 5, il y a...	1 négatif	3 positifs	2 négatifs	4 positifs	un nombre ni positif, ni négatif
2	Quels sont les nombres égaux ?	17 centièmes	0,017	0,17	170 millièmes	1700
3	Entre – 4,2 et 4,2, il y a exactement...	1 entier	7 entiers	9 entiers	8 entiers	6 entiers
4	Quels sont les nombres égaux ?	$\frac{5}{10}$	l'opposé de 2	0,5	– 0,5	50 %
5	Y a-t-il des nombres décimaux qui soient entiers ?	oui, tous !	non, bien sûr, aucun !	beaucoup	oui, par exemple, 2	cette question n'a pas de sens
6	Quels sont les nombres égaux ?	$\frac{1}{1\,000}$	10^{-3}	$\frac{10^{-2}}{10^{-5}}$	$\frac{10^{2}}{10^{5}}$	0,01
7	Quels sont les nombres plus petits que 1 ?	$\frac{2}{7}$	$\frac{10}{12}$	$\frac{12}{10}$	$-\frac{5}{4}$	$\frac{5}{4}$
8	Les trois-quarts de 2 heures, cela fait...	1,5 h	1 h 50 min	1 h 30 min	6 quarts d'heure	trois huitièmes d'heure
9	Quelles sont les nombres qui ne valent ni 0, ni 1 ?	$\frac{-1}{-1}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{-1}$	$\frac{5}{3}$	10^{-1}
10	$\sqrt{9}$, c'est...	9	3 ou – 3	– 3	3	81

THÈME

2

Le berger calculateur

Au début, lorsque l'agriculture et l'élevage fixèrent les hommes sur leur sol, le berger apprit à compter ses moutons. Et puis, la vie s'est compliquée. Il a pu acheter les moutons de son voisin. Il a eu besoin de compter les moutons manquants après le passage du loup, des voleurs de bétail et du fisc. Il s'est bientôt trouvé à la tête de multiples troupeaux. Et peut-être lui a-t-il fallu partager le troupeau hérité de son oncle d'Amérique avec ses nombreux frères et sœurs. Pour faire tout cela, les quatre opérations n'ont pas été de trop! D'autres ont été inventées, la technologie est arrivée...

Les opérations

Opérer, opération — du latin **opera** qui signifie *œuvre*, *travail* mais aussi *ouverture* ; faire des opérations, c'est du travail, mais cela ouvre en même temps l'esprit et des perspectives futures !

Le sens des 4 opérations

Additionner, soustraire, multiplier, diviser... connaissez-vous le sens de chacune de ces actions ?

À chaque écriture, sa technique

Il y a beaucoup de nombres et en plus chaque nombre a plusieurs écritures différentes. Les techniques opératoires sont plus ou moins simples selon l'écriture.

Une nouvelle opération : la puissance

Le premier jour, Il créa les nombres. Le deuxième, Il créa l'addition. Le troisième, Il créa son inverse la soustraction. Le quatrième, lassé de répéter des additions, Il créa la multiplication. Le cinquième, Il créa son inverse la division. Le sixième, lassé de répéter des multiplications, Il créa les puissances. Et le septième jour, content d'avoir créé l'arithmétique, Il se reposa.

Les surprises des nombres

TOUT LE MONDE connaît les techniques de la multiplication et de la division depuis l'école élémentaire. La calculatrice peut évidemment remplacer ces techniques, mais elle ne remplace pas le plaisir de la découverte.

- En voici quatre exemples où vous n'aurez pas trop de mal à remplacer les ? par des chiffres.

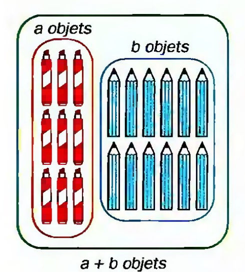
111 111 111 | 9
→ ? ? ? ? ? ? ? ?

1 111 111 111
× 1 111 111 111
→ ?? ??? ??? ??? ??? ??? ???

Attention, les résultats sont malicieux !

100 000 000 000 000 | 98
→ 1 02 04 08 16 32 6?

116 415 321 826 934 814 543 125
× 8 589 934 592
→ ? ??? ??? ??? ??? ??? ??? ??? ??? ??? ??? ???



a + b objets

une addition

```
  142
+  93
  235
```

la même à l'envers

```
  ƧƐƧ          235
+ Ɛƍ         −  93
  ƧϞ1          142
```

et c'est une soustraction !

LE SENS DES 4 OPÉRATIONS

2. 1 Addition et réunion

Si un ensemble contient a objets et si un autre ensemble contient b autres objets, alors ces deux ensembles réunis contiennent $a + b$ objets.

La somme de deux nombres est le résultat de leur addition.

Le successeur de l'entier a est noté $a + 1$, ainsi 3 est le successeur de 2. $a + 2$ est le successeur du successeur de a ; $(a + 1) + 1 = a + 2$.

$a + b$ peut être considéré comme le b-ième successeur de a ; en effet :

$a + b = (((a + 1) + 1) + \dots) + 1$ (le symbole 1 est écrit b fois).

Si un ensemble contient a objets et si un autre ensemble contient 0 objet, alors ces deux ensembles réunis contiennent a objets : $a + 0 = 0 + a = a$.

2. 2 Soustraction : une addition à l'envers

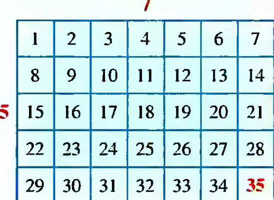
La différence $a - b$ de deux nombres a et b, est le nombre qu'il faut ajouter à b pour trouver a.

Autrement dit, par définition, $a - b$ est la solution de l'équation $x + b = a$.

La soustraction est l'opération, qui, à deux nombres fait correspondre leur différence.

Si $a = b$, alors $a - b = 0$.
Si $a < b$, alors $a - b$ est un nombre négatif.
Si $a > b$, alors $a - b$ est un nombre positif.

Une différence peut toujours être considérée comme une somme : $a - b = a + (- b)$.



	7						
	1	2	3	4	5	6	7
	8	9	10	11	12	13	14
5	15	16	17	18	19	20	21
	22	23	24	25	26	27	28
	29	30	31	32	33	34	35

2. 3 Multiplication : une addition répétée

Un nombre entier n et un nombre a étant donnés, la multiplication de a par n équivaut à une addition de n termes égaux à a.

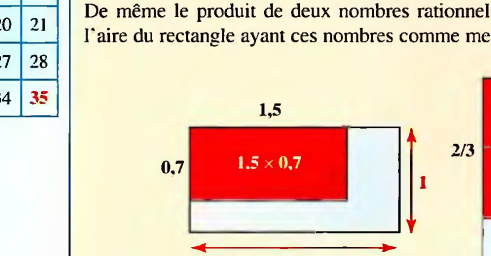
$$n \times a = \underbrace{a + a + \dots + a}_{(n \text{ fois})}.$$

Le produit de deux nombres est le résultat de leur multiplication.

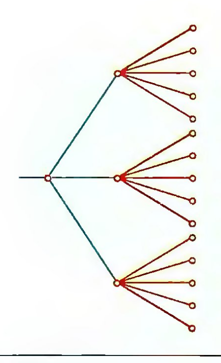
2. 4 Aire du rectangle et multiplication

Si des objets sont répartis dans un tableau rectangulaire ayant n lignes et p colonnes, alors il y a $n \times p$ objets.

Si la longueur et la largeur d'un rectangle sont mesurées par des nombres entiers, l'aire de ce rectangle est le produit de ces deux nombres.
De même le produit de deux nombres rationnels ou décimaux s'interprète comme l'aire du rectangle ayant ces nombres comme mesures de ses côtés.



3/4
2/3
$\frac{3}{4} \times \frac{2}{3}$
1
1

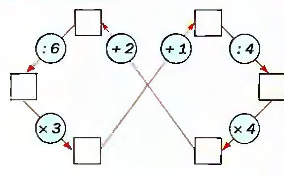


Choix d'un menu
Pour composer le menu d'un certain repas, on a quatre choix successifs à décider.



■ ***Combien y a-t-il de repas possibles ?***

Un nœud pour matheux
Voici une énigme en forme de nœud papillon !
■ ***Trouver les entiers qui conviennent dans les carrés.***



Reste

```
1000   | 7
 301   |142,85
  20
   60
    40
     5
```

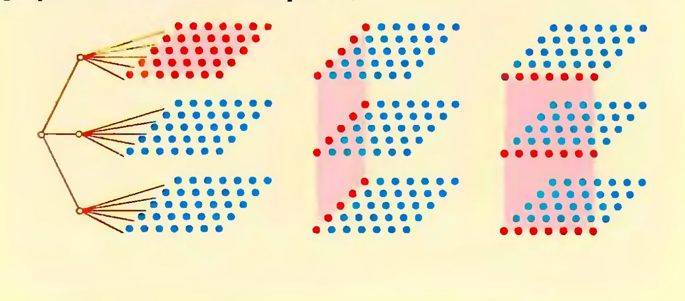
On a : 1000 = 142 × 7 + 6
Mais on peut aussi pousser la division après la virgule :
1000 = 142,85 × 7 + 0,05.

2. 5 Interprétation combinatoire de la multiplication

Si l'on peut choisir entre 3 possibilités et si, pour chacun de ces choix, on peut encore choisir entre 5 possibilités, alors il y a (en tout) 3 × 5 possibilités de choix.

On peut représenter chaque choix possible par des "branches" (voir en marge). Alors le nombre total de choix possibles est représenté par les points terminaux d'un "arbre" dont les branches se divisent successivement en 3 puis en 5.

Sur l'illustration ci-dessous, on peut reconnaître, à la fois, l'interprétation de la multiplication en termes de "mesures" (3 × 5 × 7 est le volume du parallélépipède de côtés 3, 5 et 7) et en termes de combinatoire (choix d'un plan parmi 3, choix d'une ligne parmi 5, choix d'une colonne parmi 7).



2. 6 Division : une multiplication à l'envers

Le quotient $\frac{a}{b}$ de deux nombres a et b, est le nombre par lequel il faut multiplier b pour obtenir a. Ce quotient n'existe que si b n'est pas nul.

Autrement dit, par définition, $\frac{a}{b}$ est la solution de l'équation $x \times b = a$ (avec $b \neq 0$).

La division est l'opération, qui, à deux nombres fait correspondre leur quotient.

Le quotient de deux entiers est parfois un entier, parfois un décimal, parfois un rationnel non décimal.

EXEMPLES

$\frac{5}{2} = 2{,}5$ car $2 \times 2{,}5 = 5$. Le nombre $\frac{5}{2}$ est un décimal.

Le quotient d'entiers $\frac{10}{3}$ n'est pas un décimal car il n'y a aucun décimal qui, multiplié par 3, donne comme résultat 10.

2. 7 Division entière

Lorsque a et b sont deux entiers naturels, on peut trouver un entier q et un entier r (plus petit que b) tel que

$$a = bq + r.$$

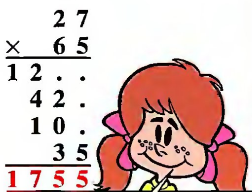
Le nombre r est le reste de la division entière de a par b.

■ ***Est-il possible d'effectuer cette addition ?***

```
      X I V
+       M C
+       X L
+ V I I I
= ? ? ? ?
```

Une méthode de multiplication mentale

```
    2 7
×   6 5
1 2 . .
  4 2 .
  1 0 .
    3 5
1 7 5 5
```



2 fois 6 : douze, douze cents.
6 fois 7 : quarante-deux dizaines, quatre cent vingt (ça fait 1 620)
2 fois 5, dix dizaines, cent (ça fait 1 720)
7 fois 5, trente-cinq (ça fait 1 755).

■ TECHNIQUES DE CALCUL : DÉCIMAUX POSITIFS

2. 8 À l'école primaire

L'écriture des nombres avec le principe de la numération de position facilite bien la réalisation effective des additions et des soustractions, vous l'avez vu dans le premier thème.

Pour les multiplications, une importante propriété, la distributivité de la multiplication sur l'addition (voir le thème 3 : Calcul littéral), permet de découper une grande multiplication en petites "sous-opérations" dont le résultat a été appris par cœur (les célèbres tables de multiplication).

2. 9 Quelques trucs utiles

- Poser additions et soustractions virgule sous virgule (afin d'ajouter ou soustraire ensemble les termes de même rang).
- Quand on pose une soustraction, le plus grand nombre est à la première ligne.
- Quand on pose une multiplication, mieux vaut mettre à la première ligne le nombre qui a le plus de chiffres.
- Penser que les multiplications et divisions par 10, 100, 1000... sont de simples décalages de virgule.
- Attention aux zéros intercalaires dans les multiplications.
- Supprimer les zéros inutiles derrière la virgule avant de poser l'opération.



Dans cette situation, il faut avoir compris le sens des opérations :

- *Une union se traduit souvent par une addition ;*
- *Un paiement, par une soustraction ;*
- *Une aire est souvent le produit de deux mesures ;*
- *Un nombre inconnu dans une addition se connaît grâce à une soustraction ;*
- *Une situation de proportionnalité (travail-salaire) cache souvent une multiplication.*

2. 10 Un exercice type : la tornade opératoire

Une horrible tornade a ravagé une page d'exercices de calcul.
Les données des trois problèmes et les questions posées se sont retrouvées pêle-mêle déchiquetées et mélangées. Enfin, les calculs faits pour résoudre les exercices sont aussi disséminés.
Voilà les résultats du carnage.

Il est parti faire les soldes avec un billet de 500 F *en poche et* 28 F *en monnaie.*
Quelle est l'aire de la partie labourée ?
Combien a-t-il gagné ?
Aujourd'hui, il en a labouré le tiers.
Combien a coûté le blouson ?
Son salaire horaire est de 56,50 *F.*
Un agriculteur possède un champ rectangulaire de 500 *m sur* 112,5 *m.*
Il revient avec deux fois moins d'argent.
Un fainéant a travaillé 3/4 d'heure.
Il a acheté un jean à 125 *F et un blouson.*

$\frac{3}{4} \times 56{,}50$

$\frac{1}{3} \times 500 \times 112{,}5$

$(500 + 28) - (\frac{500 + 28}{2} + 125)$

Réponse : 139 F
Réponse : 42,37 F
Réponse : 18 750 m^2.



■ Pouvez-vous nous aider à rétablir l'ordre initial ?

2. 11 Les grand produits et les calculatrices

Une certaine calculatrice affiche, comme résultat du produit

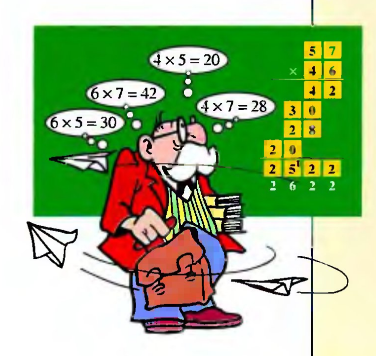
9 8 7 6 5 4 × 7 4 5 3 2 1, le nombre **7.36119 E11** .

Le résultat est à peu près 736 119 000 000.

Mais comment trouver les six derniers chiffres exactement ?

En utilisant une technique analogue à celle rappelée en marge où l'on effectue des produits à 2 chiffres en ne sachant que la table de multiplication à 1 chiffre !

Voici donc la technique combinée papier-calculatrice en se servant de la machine pour les multiplications à 3 chiffres.



3 2 1 × 6 5 4 = **209934**

3 2 1 × 9 8 7 = **316827**

7 4 5 × 6 5 4 = **487230**

7 4 5 × 9 8 7 = **735315**

```
            987 654
          × 745 321
            -------
            209 934
        316 827
        487 230
    735 315
    ---------------
    735 118 266 934
    736 119 266 934
```

2. 12 Algorithme de division

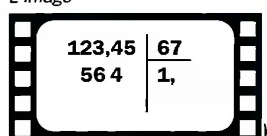
La technique de division est la plus élaborée des techniques opératoires usuelles.

Les difficultés sont de deux ordres :

— pour faire une multiplication à l'envers, il faut souvent tâtonner. Pour répondre au fameux "En bidule, combien de fois truc ?", il faut établir la table de multiplication de "truc" ou alors accepter de risquer de faire des essais qui n'aboutissent pas.

— on a l'habitude, pour calculer les restes partiels, de faire une opération complexe qui combine en un seul coup une multiplication et une soustraction. Il n'y a pas de honte à poser la soustraction, si cette combinaison vous paraît insurmontable.

L'image



et la bande-son

En 123 combien de fois 67 ?
Il y va 1 fois : 1 × 7, 7
7 ôté de 13, reste 6. 1 × 6, 6
6 plus 1, 7 ; ôté de 12, reste 5.
Je mets la virgule au quotient et j'abaisse le 4.
En 564, combien de fois 67 ?
Il y va 8 fois...

La virgule n'est pas une grosse difficulté supplémentaire.

En effet :

— On ne change pas le résultat d'une division en multipliant dividende et diviseur par un même nombre. On supprime donc la virgule du diviseur (en le multipliant par 10, 100, 1 000..., ainsi que le dividende) avant d'effectuer la division.

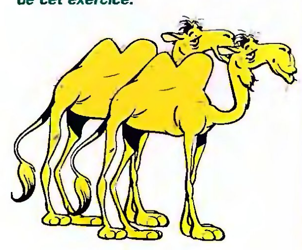
— On met une virgule au quotient quand on traverse celle du dividende.

$$\begin{array}{r|l} a & b \\ \hline r & q \end{array} \qquad a = bq + r$$

Pousser la virgule

Diviser 12,345 par 6,7, c'est aussi diviser 123,45 par 67, c'est aussi diviser 1234,5 par 670, c'est aussi diviser 12 345 par 6 700.

Elibéd ?
J'ai 30 ans, 3 000 chameaux, 350 couples de kangourous et un enclos de 6 km sur 3 km.
À la calculatrice, ajouter le nombre de chameaux, le nombre total de kangourous, l'aire en km² de l'enclos.
Multiplier le tout par 100 puis ajouter l'âge du capitaine.
■ ***Retourner la calculatrice pour lire certaines informations sur la nature de cet exercice.***



2. 13 Du bon usage de la calculatrice

La calculatrice permet de calculer sur les nombres décimaux. Mais attention, pour des nombres non décimaux (comme $\frac{1}{3}$ ou $\sqrt{2}$), elle ne donne que des valeurs approchées décimales. Son affichage étant forcément limité, elle "coupe" les nombres dont l'écriture décimale est illimitée (en les arrondissant).

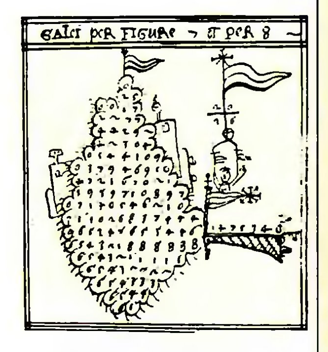
Voici quelques conseils pour bien utiliser la calculatrice :

— ne pas faire à la machine des calculs qui vont plus vite de tête (par exemple des multiplications par dix ou cent...)

— contrôler vos calculs en prévoyant l'ordre de grandeur du résultat cherché.

— se méfier des calculs complexes et notamment de l'usage des parenthèses parfois sous-entendues à cause d'une barre de fraction ou d'un radical. Mieux vaut calculer moitié à la main, moitié à la calculatrice en contrôlant les étapes du calcul au lieu de taper aveuglément tout le calcul.

— savoir interpréter et utiliser le résultat donné (est-il exact, approché, combien de décimales faut-il conserver pour donner la réponse ?).



Extrait d'un manuscrit vénitien du XVIe siècle (Bibliothèque de Plimpton) "Au secours" semble s'écrier l'écolier devant la montagne de chiffres s'échappant de la division. Heureusement aujourd'hui il y a les calculatrices.

2. 14 Comment "pousser" la division avec une calculatrice ?

Le truc consiste à imiter la technique écrite grâce à deux astuces :

— Pour savoir "Combien de fois b est contenu dans a ?", on divise a par b à la calculatrice et on ne garde que le quotient entier r qui est écrit avant la virgule.

— Puisque c'est la calculatrice qui fait le travail, on peut abaisser cinq zéros à la fois (et même plus !).

— On divise $r \times 100\,000$ par b et on recommence les deux étapes précédentes autant de fois que désiré.

EXEMPLE : la division de 10 par 7.

1 0 ÷ 7 = 1.---------

Calculer le reste : 10 – 7 × 1 = 3.

3 0 0 0 0 0 ÷ 7 = 42857.------

Calculer le reste (avec la calculatrice) :

300 000 – 7 × 42 857 = 1.

1 0 0 0 0 0 ÷ 7 = 14285.------

Calculer le reste.

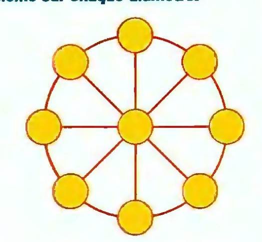
100 000 – 7 × 14 285 = 5.

5 0 0 0 0 0 ÷ 7 = 71428.------

Bonne chance pour la suite !

Somme constante

Placer les neuf entiers de – 4 à 4 de façon à ce que la somme soit la même sur chaque diamètre.



Même question avec tous les entiers de – 2 à 6.

TECHNIQUES DE CALCUL : NOMBRES RELATIFS

2. 15 Addition des relatifs

La somme de deux relatifs positifs est positive. La somme de deux relatifs négatifs est négative. Dans ces deux cas, l'opération à poser est une addition.

EXEMPLES : $4 + 8 = 12$ $\quad (-7) + (-4) = (-11)$.

Le signe de la somme d'un relatif positif et d'un relatif négatif est "à réfléchir". L'opération à poser est une soustraction.

EXEMPLES : $7 + (-5) = 2$ $\quad 3 + (-8) = (-5)$.

2. 16 Opposé d'un relatif

Tout relatif a un opposé. La somme de deux nombres opposés est zéro.

EXEMPLES : l'opposé de (-7) est 7. Celui de 0 est 0. Et $5 + (-5) = 0$.

2. 17 Soustraction des relatifs

Chez les relatifs, les soustractions entre nombres positifs se font maintenant toutes sans exceptions.

EXEMPLES : $8 - 3 = 5$ $\quad 5 - 12 = -7$.

Dans les autres cas, on procède avec la règle suivante :

Pour soustraire un nombre relatif, on ajoute son opposé.

EXEMPLE : $(-3) - (-7) = (-3) + 7 = 4$.

Résumé

Finalement, il n'y a que DEUX *opérations :*

- *l'*ADDITION,

et $\quad a - b = a + (-b)$

- *la* MULTIPLICATION

et $\quad \frac{a}{b} = a \times \left(\frac{1}{b}\right)$.

2.18 Somme algébrique

Finalement, dans l'ensemble des nombres relatifs, il n'y a pas de raison de parler de soustraction ; c'est une addition.

Le terme de somme algébrique désigne une succession d'additions et de soustractions.

EXEMPLE : $s = -3 + 7 + 9 - 8 - 10$.

Un tel calcul signifie : $\quad s = (-3) + (+7) + (+9) - (+8) - (+10)$

ou ce qui revient au même : $s = (-3) + (+7) + (+9) + (-8) + (-10)$.

Il y a deux méthodes pour calculer une somme algébrique :

— dans l'ordre où les calculs se présentent

EXEMPLE : $t = -3 + 7 + 9 - 8 + 10 = 4 + 9 - 8 + 10 = 13 - 8 + 10 = 5 + 10 = 15$.

— en rassemblant les nombres positifs ensemble et les négatifs ensemble.

EXEMPLE : $u = -6 + 13 - 9 - 5 + 4 = (13 + 4) - (6 + 9 + 5) = 17 - 20 = -3$.

Nombres croisés

Complétez les cases avec des 1 ou des (– 1).

-1	×		=	
×	■	×	■	×
	×	-1	=	
=	■	=	■	=
	×		=	-1

2.19 Multiplication des relatifs

Le produit de deux relatifs de même signe est positif.
Le produit de deux relatifs de signes contraires est négatif.

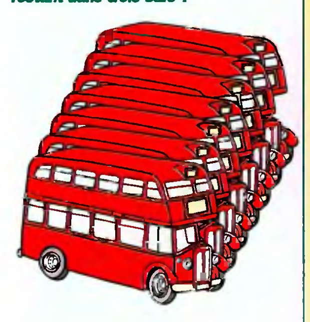
Ces deux propriétés sont connues sous le nom de "règle des signes" de la multiplication (et c'est la même règle pour la division).

EXEMPLES : $(-3) \times (-4) = 12$ $\quad 5 \times (-7) = -35$ $\quad (-2) \times 5 = -10$.

À la manière de Caen

Sept cars, pleins de touristes aux deux-tiers se dirigent vers Sète. À Troyes, un quart des touristes en descend.

Peut-on alors placer les trois-quarts restant dans trois cars ?



TECHNIQUES DE CALCUL : FRACTIONS

2. 20 Multiplication en écriture fractionnaire

Pour multiplier deux fractions, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

Si a et c sont deux nombres et si b et d sont deux nombres non nuls, alors :

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

EXEMPLE : $\frac{2}{3} \times \frac{9}{4} = \frac{2 \times 9}{3 \times 4} = \frac{2 \times 3 \times 3}{3 \times 2 \times 2} = \frac{3}{2}$.

On se simplifie la vie en faisant les simplifications comme ci-dessus avant d'effectuer les multiplications.

2. 21 Inverse d'une fraction

L'inverse d'un nombre x est le nombre par lequel il faut multiplier x pour trouver 1.

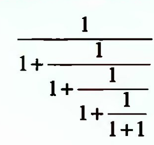
L'inverse de la fraction $\frac{a}{b}$ est la fraction $\frac{b}{a}$.

2. 22 Division en écriture fractionnaire

Pour diviser par une fraction, on multiplie par son inverse.

EXEMPLE : $\frac{2}{3} \div \frac{5}{6} = \frac{2}{3} \times \frac{6}{5} = \frac{2 \times 6}{3 \times 5} = \frac{2 \times 3 \times 2}{3 \times 5} = \frac{4}{5}$.

À calculer en moins d'une minute !



$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+1}}}}$$

Les règles de calcul avec les fractions n'ont rien d'arbitraires ; elles se justifient rigoureusement et leur justification se comprend aisément :

- *$\frac{a}{b}$ est le résultat d'une division.*
- *Une division n'est qu'une multiplication par un inverse $\frac{a}{b} = a \times \left(\frac{1}{b}\right)$.*
- *Les propriétés de l'addition et de la multiplication justifient les calculs. Exemple.*

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = a \times \left(\frac{1}{b}\right) + c \times \left(\frac{1}{b}\right) = (a + c) \times \frac{1}{b} = \frac{a + c}{b}.$$

2. 23 Addition et soustraction en écriture fractionnaire

Pour additionner (ou soustraire) deux fractions, il faut qu'elles aient le même dénominateur. On ajoute (ou soustrait) alors les numérateurs et on laisse en dénominateur le dénominateur commun.

Si a et c sont deux nombres et si b est un nombre non nul, alors :

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a + c}{b}.$$

La difficulté essentielle de l'addition des fractions réside dans le choix du meilleur dénominateur commun. Une fois celui-ci choisi, il faut écrire sans se tromper les fractions à ajouter avec ce dénominateur.

Se rappeler que le dénominateur commun choisi doit être un multiple des dénominateurs donnés, et si possible le plus petit.

EXEMPLES :

$$\frac{5}{3} + \frac{1}{9} = \frac{15}{9} + \frac{1}{9} = \frac{16}{9}.$$

$$4 - \frac{5}{7} = \frac{28}{7} - \frac{5}{7} = \frac{23}{7}.$$

$$\frac{1}{15} - \frac{7}{12} = \frac{4}{60} - \frac{35}{60} = \frac{-31}{60} = -\frac{31}{60}.$$

Table de racines carrées

a	$\sqrt{a}$
1	1
2	1,414213562
3	1,732050808
4	2
5	2,236067977
6	2,449489743
7	2,645751311
8	2,828427125
9	3
10	3,16227766

Approximations

■ ***Vérifier sur les approximations décimales que***
$\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$ ***et***
$\sqrt{2} \times \sqrt{5} = \sqrt{10}$.

■ ***Donner des approximations décimales de*** $\sqrt{40}$, $\sqrt{700}$, $\sqrt{70}$.

Rectangle

Les dimensions d'un rectangle sont $\sqrt{125} - \sqrt{5}$ *et* $\sqrt{245} - \sqrt{45}$.

■ ***Que penser de ce rectangle ? et de son aire ?***

TECHNIQUES DE CALCUL : RACINES CARRÉES

2. 24 Multiplication avec radicaux

Si a et b sont deux nombres positifs, alors : $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$.

EXEMPLE $\sqrt{5}\sqrt{20} = \sqrt{100} = 10$.

On voit ici deux racines carrées non décimales dont le produit lui, est décimal.

2. 25 Écrire une racine sous la forme $a\sqrt{b}$, avec a et b entiers

La formule ci-dessus sert aussi à transformer l'écriture d'un nombre de façon à avoir l'entier le plus petit possible sous le radical.

EXEMPLES : $\sqrt{245} = \sqrt{49}\sqrt{5} = 7\sqrt{5}$ $\quad \sqrt{700} = \sqrt{7}\sqrt{100} = 10\sqrt{7}$.

2. 26 Division avec radicaux

Si a est un nombre positif et si b est positif et non nul, alors : $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$.

EXEMPLE : $\dfrac{\sqrt{63}}{\sqrt{28}} = \sqrt{\dfrac{63}{28}} = \sqrt{\dfrac{9}{4}} = \dfrac{3}{2}$.

On voit ici deux racines carrées non décimales dont le quotient lui, est décimal.

2. 27 Addition et soustraction avec radicaux

● **En général, $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ n'est pas égal à $\sqrt{a+b}$.**

EXEMPLE : $\sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7$ alors que $\sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$.

Insistons sur cette non-propriété avec une petite démonstration :

$(\sqrt{a+b})^2 = a + b$

$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b = a + b + 2\sqrt{ab}$.

Donc si $\sqrt{a+b}$ et $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ étaient égaux, leurs carrés seraient eux-aussi égaux et alors $2\sqrt{ab}$ serait nul ; et donc ab serait nul. Diable si le produit de deux nombres était toujours nul, ça se saurait !

● **Il n'y a souvent pas d'écriture plus simple pour un nombre égal à une somme de racines.**

EXEMPLE : la somme $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ ne peut se réduire.

● Cependant, il arrive heureusement que l'écriture de certaines sommes de racines puisse se réduire.

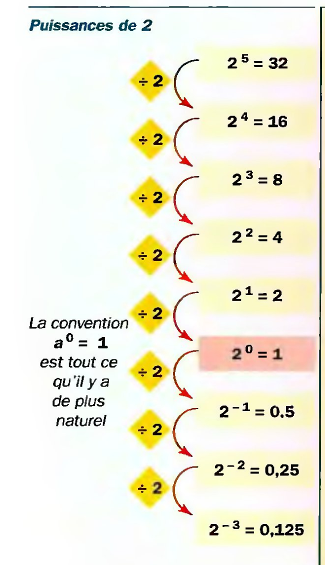
EXEMPLES :

$\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$

$\sqrt{48} + \sqrt{75} - 2\sqrt{27} = \sqrt{16}\sqrt{3} + \sqrt{25}\sqrt{3} - 2\sqrt{9}\sqrt{3}$

$= 4\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 6\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$.

Puissances de 2



La convention $a^0 = 1$ est tout ce qu'il y a de plus naturel

UNE NOUVELLE OPÉRATION : LA PUISSANCE

2. 28 La notation puissance : exposant positif

Le produit de n nombres égaux à a est la puissance n-ième du nombre a.

Si a est un nombre et si n est un nombre entier positif, alors :

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ fois}} \text{ (on lit "}a\text{ exposant }n\text{")}$$

Par convention, quel que soit le nombre a (non nul) $a^0 = 1$.

EXEMPLES $3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$ $\quad (-5)^2 = (-5) \times (-5) = 25$

$(-1)^9 = (-1)$ $\quad (-1)^0 = 1$ $\quad 1{,}5^2 = 2{,}25.$

2. 29 Exposant négatif

On peut donner un sens à l'écriture a^n lorsque le nombre n est un entier négatif.

Si a est un nombre non nul et si n est un entier positif, alors

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

EXEMPLE : $2^{-5} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32} = 0.03125.$

$10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1\,000} = 0{,}001.$

2. 30 Le cas particulier des puissances de dix

Lorsque le nombre a est 10, les puissances de a prennent un air familier. Regardez :

$10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1\,000.$

$10^6 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 1\,000\,000$

Si n est un entier positif, alors :

$$10^n = 10 \times 10 \times 10 \times \ldots \times 10 = 1\underbrace{000\ldots0000}_{n \text{ zéros}}$$

Et de l'autre côté

$10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1\,000} = 0{,}001.$

Si n est un entier positif, alors :

$$10^{-n} = \frac{1}{10^n} = \frac{1}{10\ldots00} = \underbrace{0{,}0\ldots01}_{n \text{ chiffres après la virgule}}$$

Les puissances de dix servent à l'**écriture scientifique** des décimaux : c'est une écriture des nombres qui donne immédiatement une idée de l'ordre de grandeur du nombre. En effet :

Tout décimal positif peut s'écrire comme le produit d'un nombre compris entre 1 et 10 par une puissance de dix.

EXEMPLES : $125\,000 = 1{,}25 \times 10^5$ $\quad 0{,}000\,007 = 7 \times 10^{-6}$

Écrire en puissance de 10



Mille milliards de mille sabords !

L'écriture scientifique est souvent abrégée par l'utilisation de la lettre majuscule E, initiale de "exposant". Ainsi

125 000 = 1,25 E5 ;
0,000 007 = 7 E – 6

Vocabulaire

Voici les préfixes adoptés par la XIXe Conférence générale des poids et mesures en octobre 1991.

Atto : (adopté en 1964) du danois atten, 18.

Centi : (1783) du latin centum, cent.

Déca : du grec deka, dix.

Déci : du latin décimus, dixième.

Exa : du grec hexa, six.

Femto : du danois femten, 15.

Giga : du grec gigas, géant.

Hecto : du grec hekaton, cent.

Kilo : du grec khilioi, mille.

Méga : du grec mégas, grand.

Micro : du grec mikros, petit.

Milli : du latin mille, mille.

Peta. du grec penta, cinq.

Pico : de l'italien piccolo, petit.

Téra : du grec téras, monstre.

Yocto et yotta : évoquent 8 (8e puissance de 10^{-3} et 10^{3}).

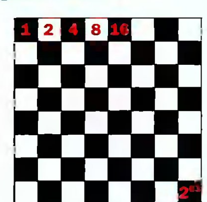
Zepto et zetta évoquent 7 (7e puissance de 10^{-3} et 10^{3}).

2. 31 Le système décimal

Entre l'infiniment petit et l'infiniment grand, les hommes ont inventé une échelle de grandeurs intermédiaires avec lesquelles ils mesurent ce que leur imagination ne peut saisir…

Multiples		
10^{24}	1 000 000 000 000 000 000 000 000	(yotta ; Y)
10^{21}	1 000 000 000 000 000 000 000	(zetta ; Z)
10^{18}	1 000 000 000 000 000 000	(exa ; E)
10^{15}	1 000 000 000 000 000	(peta ; P)
10^{12}	1 000 000 000 000	(téra ; T)
10^{9}	1 000 000 000	(giga ; G)
10^{6}	1 000 000	(méga ; M)
10^{3}	1 000	(kilo ; k)
10^{2}	100	(hecto ; h)
10^{1}	10	(déca ; da)
10^{0}	1	(unité)
Sous-multiples		
10^{-1}	0,1	(déci ; d)
10^{-2}	0,01	(centi ; c)
10^{-3}	0,001	(milli ; m)
10^{-6}	0,000 001	(micro ; m)
10^{-9}	0,000 000 001	(nano ; n)
10^{-12}	0,000 000 000 001	(pico ; p)
10^{-15}	0,000 000 000 000 001	(femto ; f)
10^{-18}	0,000 000 000 000 000 001	(atto ; a)
10^{-21}	0,000 000 000 000 000 000 001	(zepto ; z)
10^{-24}	0,000 000 000 000 000 000 000 001	(yocto ; y)

La légende de Séta



Pour le récompenser de l'invention du jeu d'échecs, l'empereur Shiram promit à Séta le nombre de grains de riz contenu dans la dernière case d'un échiquier géant sur lequel on avait doublé le nombre de grains de riz sur chaque nouvelle case en partant d'un grain pour la première case.

Démontrer que ce nombre ne vaut pas loin de dix milliards de milliards !

2. 32 Interprétation de l'opération "puissance"

Si une "chose" est multipliée par a au cours d'une certaine étape d'un processus, alors après n étapes, cette chose est multipliée par a^n.

On a alors :

$$a^n\, a^p = a^{n+p} \quad \text{et} \quad (a^n)^p = a^{np}.$$

EXEMPLE

Lundi quelqu'un décide de confier un secret à 3 personnes. Chaque jour de la semaine chaque détenteur du secret le confie à 3 autres personnes qui ne le connaissaient pas. Dimanche soir combien de personnes connaîtront le secret ?

Le nombre de personnes est multiplié chaque jour par 4 : en effet, il y a ceux qui connaissaient le secret auxquels s'ajoutent trois fois plus de personnes qui viennent de l'apprendre.

$4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^7$.

Pour calculer approximativement ce nombre, utilisons le fait remarquable (et à savoir) :

$$2^{10} = 1\,024 \approx 1\,000 = 10^3$$

et les propriétés des puissances :

$4^7 = (2 \times 2)^7 = 2^7 \times 2^7 = 2^{14} = 2^{10} \times 2^4 \approx 1\,000 \times 16 = 16\,000$.

Au bout d'une semaine 16 000 personnes connaissent le secret.

Note : le signe ≈ se lit "est à peu près égal à" (voir 6.16 page 67).

LES PRODUITS DE LA JALOUSIE

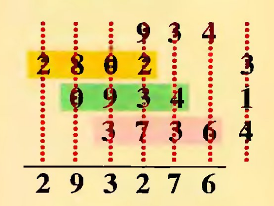
Lorsque les français et les hollandais apprirent des commerçants italiens la technique de multiplication des nombres avec les chiffres arabes de la numération décimale, ils furent émerveillés. Presque autant que par les belles napolitaines qui se cachaient derrière les "fenêtres à jalousie" sur lesquelles le soleil marquait son ombre diagonale. C'est pourquoi ils appelèrent cette technique "multiplicatio per gelosia".

Algorithme de la multiplication

			9	3	4
		×	3	1	4
		3	7	3	6
	0	9	3	4	
2	8	0	2		
2	9	3	2	7	6

Aujourd'hui, pour multiplier 934 par 314, on commence la multiplication par le chiffre des unités de 314.

4 fois 4, seize, je pose 6 et je retiens 1 ; 4 fois 3, douze, et un de retenue, 13...



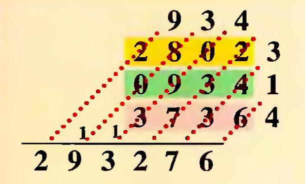
Au Moyen Âge, on effectuait d'abord la multiplication par le chiffre des centaines, puis par celui des dizaines, puis par celui des unités. C'est la même chose, à condition de faire le décalage dans le bon sens.

En 1585, un ingénieur hollandais, **Simon Stevin**, fit paraître un petit livre appelé ***La Disme***.

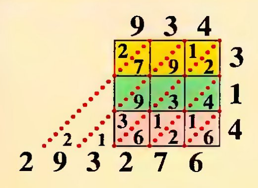
Il y expliquait comment effectuer les opérations arithmétiques de façon très simple et très pratique, à condition que l'on veuille bien écrire les nombres en repérant bien le rang des dizaines, des unités, des dixièmes, des centièmes, ...

Pour la multiplication, sa disposition est encore la nôtre aujourd'hui.

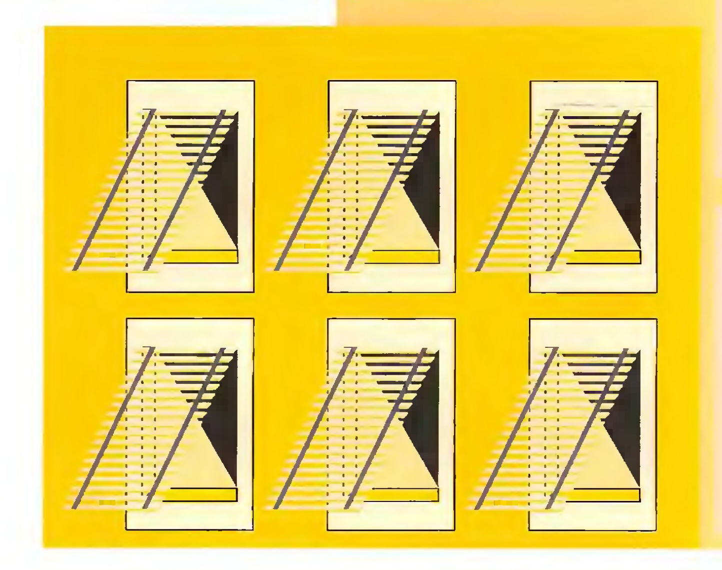
Cette disposition était une amélioration de celle utilisée par les commerçants italiens qui l'avaient apprise des Turcs et des Libanais, qui l'avaient apprise des Arabes, qui l'avaient apprise des...



Au lieu de décaler pour additionner en colonnes, on préférait écrire dans un rectangle en additionnant en diagonale.

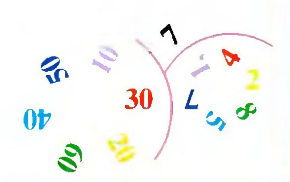


Et, au lieu d'effectuer la « retenue » de tête, on préférait la marquer dans la demi-case supérieure.



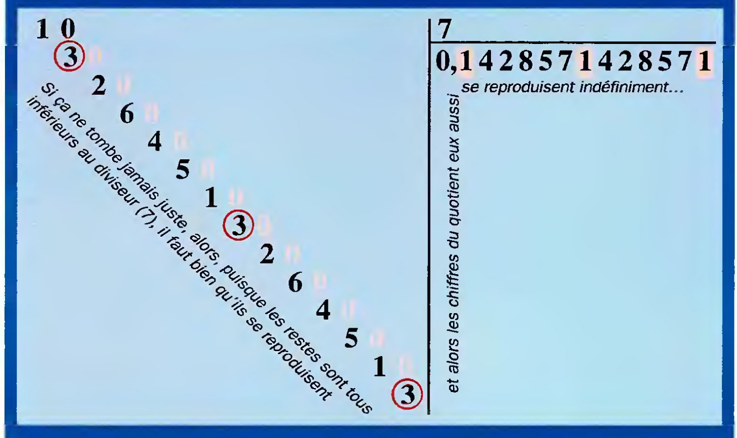
L'ALGORITHME DE LA DIVISION

Nous avons déjà vu comment on pouvait adapter la technique de division écrite à l'usage de la calculatrice pour obtenir la suite indéfinie des décimales d'un quotient d'entiers non décimal. C'est fascinant....



Des écritures infinies

La plus petite des fractions peut être équivalente à une longue suite de décimales. Observez l'exemple du calcul du quotient $\frac{1}{7}$ calculé grâce à l'algorithme de la division.



Mais à l'inverse, comment trouver le quotient d'entiers égal à une certaine écriture décimale dont une suite de chiffres se répète indéfiniment ?

Quelles fractions valent…

a = 0,42424242424242424242424242424242............................ ?
b = 0.27027027027027027027027027027027 0............................ ?
c = 0.42142142142142142142142142142 1............................ ?
d = 0.17891789178917891789178917891789.......................... ?
e = 0,75757575757575757575757575757575............................ ?
f = 0.88888888888888888888888888888888............................ ?



Faisons d'abord une manipulation un peu magique pour trouver une écriture infinie du nombre a.

Calculons $100 \times a$:

$100 \times a = 42{,}424242424242424242424242$

En effet pour multiplier par 100 on déplace la virgule de deux positions vers la droite.

On a donc :

$100 \times a = 42 + a$

d'où $99a = 42$.

Finalement. le nombre a s'écrit $\frac{42}{99}$.

Ce truc assez étonnant marche tout le temps. En effet : si n chiffres se répètent dans l'écriture décimale du nombre x. calculez alors $10^n \times x$ et vous vous apercevrez que ce nombre ne diffère de x que d'un nombre entier. Une petite équation du premier degré à résoudre, et le tour est joué !

Test 2

Pour chacune des 10 questions, indiquer la ou les bonnes réponses parmi A, B, C, D ou E

	Questions	A	B	C	D	E
1	En rajoutant des parenthèses à $1 - 2 + 3 - 4$, peut-on obtenir…	0	1	-2	3	-8
2	10^{-6}, c'est…	$\frac{1}{10^6}$	$\frac{6}{10^1}$	0,000 001	-10^6	0,000 000 1
3	3^0, c'est…	0	1	3	$\frac{0}{3}$	$\frac{3}{3}$
4	$(-1) \times 2 \times (-3) \times 4 \times (-5) \times 6 \times (-7) = \ldots$	720	4 940	$-4\,940$	-720	5 040
5	Le double de $\frac{2}{12}$, c'est	$\frac{4}{12}$	$\frac{2}{24}$	$\frac{4}{24}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{3}$
6	La moitié de $\frac{10}{7}$, c'est	$\frac{10}{14}$	$\frac{20}{7}$	$\frac{5}{7}$	0,7	$\frac{20}{14}$
7	$\frac{26}{15} = \ldots$	$\frac{20}{15} + \frac{6}{5}$	$\frac{30}{15} - \frac{4}{15}$	$\frac{30}{15} + \frac{4}{15}$	$\frac{2}{3} \times \frac{13}{5}$	$\frac{13}{15} + \frac{13}{15}$
8	$\frac{2}{\sqrt{3}+1}$ vaut…	$1 - \sqrt{3}$	2	$\sqrt{3} - 1$	$\frac{2}{\sqrt{2}}$	0,732…
9	Quel est le nombre de chiffres de l'entier $2^7 \times 5^7$?	6	7	8	9	10
10	L'inverse de l'inverse de l'opposé, c'est…	le nombre de départ	l'inverse	l'opposé	l'opposé de l'inverse	l'inverse de l'opposé

THÈME 3

Des chiffres et des lettres

Il y a des nombres de diverses natures, avec pour chacun des formes d'écriture et des techniques de calcul appropriées. Mais dans tous les ensembles de nombres, les mêmes propriétés des opérations se retrouvent. D'où l'idée qu'il y ait des calculs valides pour tous les types de nombres et d'écriture. Et alors, très curieusement, tout devient plus simple. C'est la base du calcul algébrique. Les nombres y sont désignés par des lettres.

Calcul littéral

Littéral a la même origine que le mot "lettre". Le calcul avec des lettres à la place des nombres s'appelle l'**algèbre**. Ce mot vient de l'arabe ***al jabr***, mot figurant dans le titre d'un très important livre du mathématicien *Al-Khawarismi* (800-847) et désignant le passage d'un membre à l'autre d'une équation.

Addition et multiplication

Ces deux opérations ont plus de points communs qu'il n'y paraît : une liste de leurs propriétés communes a pu être dressée.

Pourquoi des lettres ?

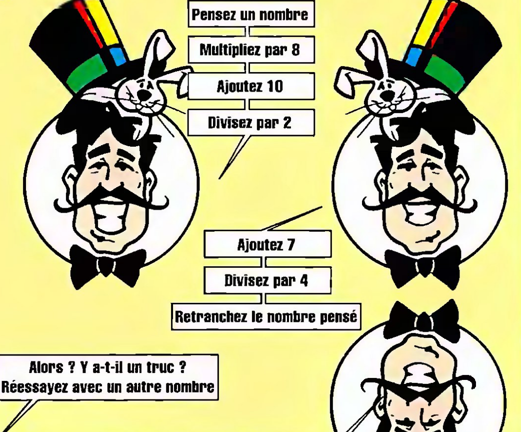
Une égalité contenant des lettres permet de décrire un calcul ou d'exprimer une relation. Mais, grâce aux propriétés de l'égalité, on peut faire beaucoup mieux : transformer des informations sur les nombres pour en extraire des résultats parfois très étonnants...

La distributivité

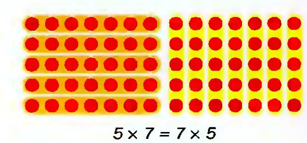
"Développer" et "factoriser" sont les deux mamelles du calcul littéral. Mais pour ne pas vous noyer dans les eaux très techniques du calcul algébrique, suivez nos conseils "à la lettre".

Les nombres pensés

Ce que les magiciens sortent de leur chapeau semble n'avoir aucun rapport avec ce qu'ils y ont mis. Et c'est bien cela qui en fait le charme... Suivez les instructions du mathémagicien :







5 × 7 = 7 × 5

ADDITION ET MULTIPLICATION

3. 1 Des propriétés communes

Dans une addition ou une multiplication, on peut changer l'ordre des termes.

Si a et b sont deux nombres, alors :

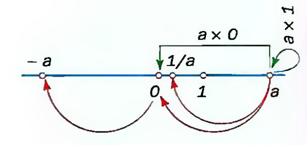
$a + b = b + a$ et $a \times b = b \times a$.

Lors d'une addition ou d'une multiplication de trois nombres, on peut effectuer indifféremment en premier l'une ou l'autre des opérations.

Les parenthèses sont donc inutiles dans ce cas.

Si a, b, c sont trois nombres, alors :

$(a + b) + c = a + (b + c)$ et $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$.



Pour chacune de ces deux opérations, il existe un "élément neutre" :

0 pour l'addition, 1 pour la multiplication.

Si a est un nombre, alors : $a + 0 = a$ et $a \times 1 = a$.

Tout nombre a un opposé : c'est le nombre qu'il faut lui ajouter pour trouver 0.

Tout nombre non nul a un inverse : c'est le nombre par quoi il faut le multiplier pour trouver 1.

a est un nombre non nul, alors : $a + (-a) = 0$ et $a \times \left(\frac{1}{a}\right) = 1$.

3. 2 Rôle des parenthèses

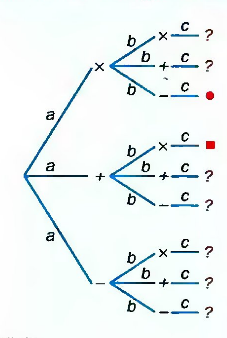
Dans un calcul, on effectue en premier les calculs entre parenthèses. En cas de parenthèses emboîtées, on calcule d'abord les parenthèses les plus intérieures.

EXEMPLES : $(2 + 3) \times 4 = 5 \times 4 = 20$.

$((-2 - 3) - 7) \times 5 = (-5 - 7) \times 5 = (-12) \times 5 = -60$.

Chaque parenthèse est remplacée par le résultat du calcul qu'elle contenait.

■ ***Accrochez à chaque branche de l'arbre le "fruit" des règles de calcul.***



EXEMPLES

● $a \times b - c = ab - c$

■ $a + b \times c = a + bc$

3. 3 Convention de priorité de la multiplication

En l'absence de parenthèses, la multiplication (et la division) ont priorité sur l'addition et la soustraction.

EXEMPLE : $2 + 3 \times 4 = 2 + 12 = 14$. Par contre $(2 + 3) \times 4 = 5 \times 4 = 20$.

De même : $-7 \times 3 + 5 \times 2 = -21 + 10 = -11$.

3. 4 Convention par défaut

Si aucune des règles précédentes n'est applicable, on effectue les calculs dans l'ordre où ils se présentent.

EXEMPLE

$2 - 7 + 5 = -5 + 5 = 0$. Par contre $2 - (7 + 5) = 2 - 12 = -10$.

De même : $7 \div 5 \times 2 = 1{,}4 \times 2 = 2{,}8$.

Fais-moi signe
D'un seul coup d'œil, peut-on prévoir le signe qui précédera d et celui qui précédera f quand on développera l'expression E ?
E = a – (b – (c – (d – (e – f))))

3. 5 Addition, soustraction et parenthèses

Deux règles résument la situation :

— une parenthèse située en début de calcul ou précédée d'un + (signe d'addition) peut se supprimer sans rien changer au résultat.

— une parenthèse précédée d'un – (signe de soustraction ou d'opposée) se supprime en échangeant tous les signes d'addition et de soustraction contenus à l'intérieur.

Si a, b, c sont des nombres, alors :

$a + (b + c) = a + b + c$ $\quad$ $a - (b + c) = a - b - c$

$a + (b - c) = a + b - c$ $\quad$ $a - (b - c) = a - b + c$

3. 6 Sous-entendre les signes de multiplication

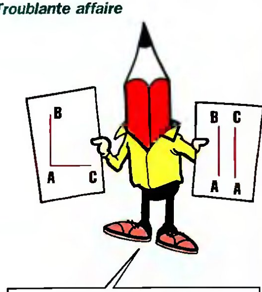
Dans le cadre du grand ménage destiné à rendre lisibles les calculs compliqués, il a été convenu de ne pas écrire le signe de multiplication dans les cas où il n'est pas indispensable, c'est-à-dire

entre deux lettres,
entre un nombre et une lettre,
entre un nombre et une parenthèse
ou entre deux parenthèses.

EXEMPLES

$a \times b$	pourra s'écrire simplement	ab
$2 \times b$	s'écrira si l'on veut	$2b$
$a \times (b + c)$	s'écrira aussi	$a(b + c)$.

Troublante affaire



Si (AB) est perpendiculaire à (AC) le triangle ABC est rectangle en A.
Donc $AB^2 + AC^2 = BC^2$.
Donc $(AB + AC)^2 = BC^2$.
Donc AB + AC = BC.
Donc A, B et C sont alignés.
Donc (AB) et (AC) sont parallèles !

Il y a quelque chose qui ne va pas, mais où exactement ?

Un gros produit
Sachant que $3\,689^2 = 13\,608\,721$, peut-on, sans utiliser la calculatrice et sans poser d'opérations, calculer le produit : $3\,687 \times 3\,691$.
Et le produit $3\,589 \times 3\,789$?
Et $6\,689 \times 689$?

3. 7 Distributivité de la multiplication sur l'addition

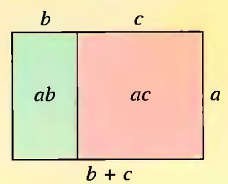
La propriété qui régit les rapports entre la multiplication et l'addition-soustraction est résumée dans les égalités ci-dessous.

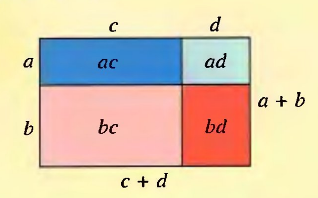
Si a, b, c, d sont des nombres, alors :

$a \times (b + c) = a \times b + a \times c.$ $\quad$ $a \times (b - c) = a \times b - a \times c$

$(a + b) \times (c + d) = a \times c + a \times d + b \times c + b \times d$

$(a + b) \times (c - d) = a \times c - a \times d + b \times c - b \times d$





3. 8 Produits remarquables

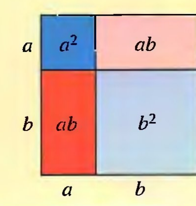
L'application de la règle ci-dessus à des produits particuliers donne les trois égalités ci-dessous connues sous le nom d'**identités remarquables** :

Si a et b sont des nombres, alors :

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$



$a^n \times a^p = a^{n+p}$

$\underbrace{aaaaa\ldots aaa}_{n \text{ fois}}\ \underbrace{aaaa\ldots aaaaaaa}_{p \text{ fois}}$ — $n + p$ fois

$(a^n)^p = a^{np}$

n fois

aaaaaaaaaaaaa...aaaaaaa
aaaaaaaaaaaaa...aaaaaaa
aaaaaaaaaaaaa...aaaaaaa
....
aaaaaaaaaaaaa...aaaaaaa

p fois

np fois

3. 9 Les règles du calcul avec les puissances

L'écriture raccourcie des puissances permet d'établir quatre règles de calcul très faciles à comprendre en retraduisant les puissances en termes de multiplication.

Si a et b sont deux nombres, et si n et p sont deux nombres entiers

$a^n b^n = (ab)^n \qquad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

$a^n a^p = a^{n+p} \qquad (a^n)^p = a^{np}.$

3. 10 Les règles de priorité

Il a fallu hiérarchiser l'opération puissance par rapport aux autres opérations. La convention faite est que **la puissance a priorité sur la multiplication**, et a fortiori sur l'addition et la soustraction.

Le calcul décrit par l'écriture $2 \times 3^2 + 5 + (-2)^3$ est le suivant

$2 \times 9 + 5 + (-8) = 18 + 5 - 8 = 15.$

Cette priorité a des conséquences en matière de signe :

L'écriture -2^4 désigne le nombre -16 (on calcule 2^4 d'abord puis on prend son opposé).

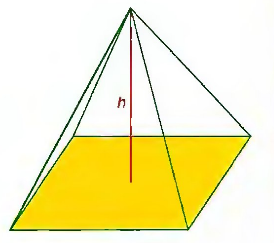
L'écriture $(-2)^4$ désigne le nombre 16 (on calcule $(-2)(-2)(-2)(-2)$).

EXEMPLE : calcul approximatif de 2^{64}.

On sait que $2^{10} = 1\,024$; et donc $2^{10} \approx 10^3$.

Donc $2^{64} = 2^{60+4} = 2^{60} \times 2^4 = (2^{10})^6 \times 2^4$. $2^{64} \approx (10^3)^6 \times 16$. $2^{64} \approx 10^{18} \times 16$.

Résultat : 16 milliards de milliards.



POURQUOI DES LETTRES ?

3. 11 Pour décrire un calcul

EXEMPLE : Si on appelle B l'aire de la base d'une pyramide et h sa hauteur, alors le volume V de cette pyramide est égal à $\frac{Bh}{3}$.

3. 12 Pour exprimer une relation entre des nombres

EXEMPLE : Matthieu a 9 ans et sa mère 31.

Quand la mère sera-t-elle deux fois plus âgée que le fils ?

Dans x ans, l'âge du fils sera $9 + x$ et celui de la mère $31 + x$.

On cherche x tel que : $(31 + x) = 2(9 + x)$.

Si d est une distance à parcourir, v la vitesse de parcours et t la durée, alors ces trois nombres sont liés par la relation

$d = v \times t$;

mais on a aussi bien :

$v = \frac{d}{t}$ et $t = \frac{d}{v}$.

3. 13 Pour transformer des écritures

Les règles opératoires permettent de "calculer", c'est-à-dire de trouver de nouvelles relations jusqu'à obtention d'un résultat intéressant :

- Ainsi dans l'exemple précédent :
  $31 + x = 2(9 + x) = 18 + 2x$
  $31 - 18 = 2x - x$, d'où $x = 13$!
  Dans 13 ans, la mère aura 44 ans et le fils 22 ans.
- Dans la pyramide, on peut déduire les valeurs de B ou de h en fonction des deux autres données :
  Si $V = \frac{Bh}{3}$, alors $B = \frac{3V}{h}$ et $h = \frac{3V}{B}$.

L'égalité $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$ est vraie pour tous les nombres x et y.
■ *Que donne cette égalité lorsqu'on remplace x par 100 et y par 2 ?*
Et lorsqu'on remplace y par 1 ?
Et lorsqu'on remplace x par y + 1 ?

3. 14 L'égalité

Une égalité affirme que l'objet désigné par le premier membre (avant le signe =) est le même objet que celui désigné par le second membre (après le signe =).

3. 15 La substitution

Si $a = b$, alors on peut remplacer a par b dans toute écriture où a intervient.

Pour calculer $E = (a + b) - (a - b)$ avec $a = 17{,}245$ et $b = 4$, il vaut mieux réduire l'expression E avant de substituer les nombres.
$E = a + b - a + b = 2b$.

Si $b = 4$, alors $E = 8$ (et a vaut tout ce qui lui chante).

3. 16 Du statut de l'égalité

Une égalité comme $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ est vraie quels que soient les nombres que l'on met à la place de chaque lettre. De telles égalités sont appelées **identités**. Elles ne donnent aucun renseignement sur les nombres qu'elles contiennent. Et pourtant elles sont très utiles quand même, car elles permettent de faire d'un coup tous les calculs numériques avec le même moule.

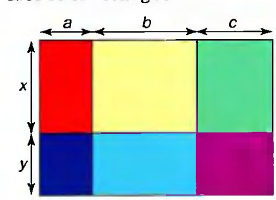
EXEMPLES

$a + 3 = 3 + a$ est une égalité vraie quel que soit le nombre mis à la place de a.

$x + 3 = 4$ est une égalité vraie si $x = 1$ et fausse si $x \neq 1$. Une telle égalité est une **équation** : certains nombres y sont "inconnus".

Calculer A(x + y).
Puis, en remplaçant A par a + b + c, calculer (a + b + c)(x + y).
■ ***Combien de termes contient le développement ?***

Écrire l'aire d'un rectangle de côtés a + b + c et x + y comme somme des aires de six rectangles.

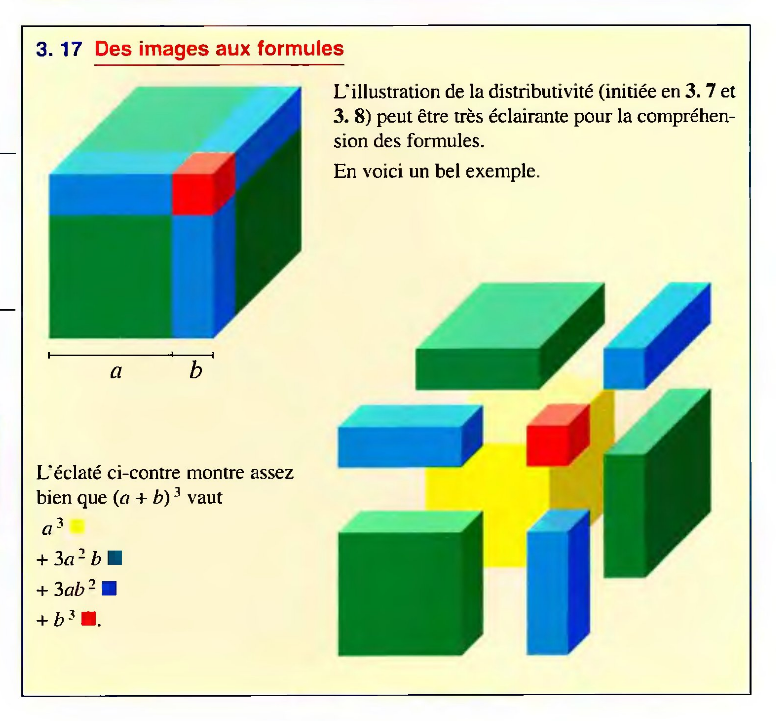


■ ***Comparer avec les résultats de l'exercice précédent.***

3. 17 Des images aux formules

L'illustration de la distributivité (initiée en **3. 7** et **3. 8**) peut être très éclairante pour la compréhension des formules.

En voici un bel exemple.



L'éclaté ci-contre montre assez bien que $(a + b)^3$ vaut
a^3 ■
$+ 3a^2b$ ■
$+ 3ab^2$ ■
$+ b^3$ ■.



3. 18 Un exemple-type : le calculateur prodige

Évariste prétend être capable de calculer très vite (sans machine) les carrés de tous les nombres se terminant par 5 jusqu'à 100 (5, 15, 25, 35...)
Comment s'y prendre de la façon la moins fatigante et la plus rapide pour être aussi bon que lui ?

- **Analyse du problème**

Il faut d'abord examiner la forme des nombres dont on cherche le carré. Si on appelle d leur nombre des dizaines, ils s'écrivent, de façon naturelle, $10d + 5$.
Le calcul des premiers carrés permet de conjecturer qu'ils se terminent par 25. D'où l'idée de s'intéresser au nombre : $(10d + 5)^2 - 25$.
Reconnaissant une différence de carrés, on décide de factoriser cette expression.
$(10d + 5)^2 - 25 = [(10d + 5) - 5][(10d + 5) + 5] = 10d(10d + 10) = 10d \times 10(d + 1)$
Et on en déduit que $(10d + 5)^2 = 100d(d + 1) + 25$.

- **Énoncé du truc**

Voici donc une étonnante méthode pour calculer les carrés cherchés.
— Extraire le nombre de dizaines (exemple $75 \to 7$) ;
— Multiplier cet entier par l'entier suivant ($7 \times 8 = 56$) ;
— Multiplier par 100 (5 600), puis ajouter 25 (5625), ce qui revient à écrire 25 à droite du produit obtenu.
Évariste prétend qu'il a ainsi réalisé en moins d'une minute la table des vingt carrés demandés !

- **Mais encore**

Cette méthode marche encore pour les nombres supérieurs à 100.
Ainsi pour 125^2, on calcule $12 \times 13 = 156$, et on a bien $125^2 = 15\,625$.

Dans cette situation, on a :
- *remplacé plusieurs calculs numériques par un seul calcul littéral ;*
- *Utilisé la distributivité de la multiplication sur l'addition et un produit remarquable pour factoriser ;*
- *Substitué dans l'écriture factorisée (plus simple) pour trouver un résultat numérique.*

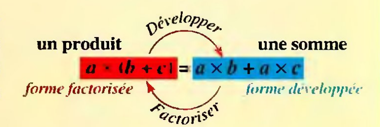
Retruc
Mais le plus extraordinaire, c'est que le truc marche pour la multiplication de deux nombres (de même dizaine) dont les unités ont pour somme 10 !
Exemple sur 62×68 :
*$6 \times 7 =$ **42** et $2 \times 8 =$ **16**.*
*Le résultat est **4216** !*

LA DISTRIBUTIVITÉ

3. 19 Développer

Développer une expression, c'est l'écrire comme une somme.

C'est la règle de distributivité de la multiplication sur l'addition qui permet de transformer un produit de deux termes $a \times (b + c)$ en une somme de deux termes $ab + ac$.



3. 20 Techniques pour développer

— Utilisation de la distributivité simple ou double :

$7(a + 2) = 7a + 14.$
$(a + x)(2 - y) = 2a - ay + 2x - xy.$
$(x + 3)(2x - 5) = 2x^2 - 5x + 6x - 15 = 2x^2 + x - 15.$

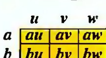
— Utilisation directe des produits remarquables :

$(2a - 3)(2a + 3) = 4a^2 - 9.$
$(3x + 5)^2 = 9x^2 + 30x + 25.$
$\left(1 - \frac{x}{4}\right)^2 = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{16}.$

— Combinaison des méthodes précédentes :

$2(a + 1) + (a - 1)^2 = 2a + 2 + a^2 - 2a + 1 = a^2 + 3.$
$(x + 5)^2 - (3x - 1)^2 = (x^2 + 10x + 25) - (9x^2 - 6x + 1) = -8x^2 + 16x + 24.$

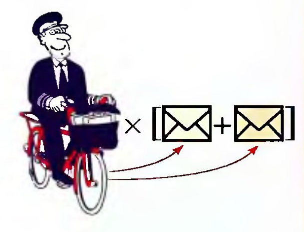
- *Chacun des termes d'une somme entre parenthèses doit multiplier chaque terme de l'autre somme entre parenthèses.*



- *Les deux produits peuvent être présentés "en rectangle".*

	u	v	w
a	au	av	aw
b	bu	bv	bw

C'est bien le "facteur" qui distribue les lettres.



3. 21 Factoriser

Factoriser une expression, c'est l'écrire comme un produit.

C'est la même règle de distributivité de la multiplication sur l'addition, mais lue de droite à gauche, qui permet de transformer une somme de deux termes $ab + ac$ en un produit de deux termes $a \times (b + c)$.

3. 22 Techniques pour factoriser

Tout le problème est de reconnaître le facteur commun.

— Ce peut être un simple nombre

$3x - 27 = 3(x - 9)$.

$4xy - 5y = y(4x - 5)$.

— Ce peut être un produit

$50xy + 10y = 10y(5x + 1)$.

$4xy^2 - 3x^2y = xy(4y - 3x)$.

$b^3 + 2b^5 = b^3(1 + 2b^2)$.

— Ce peut être une somme

$(2a + 1)(a - 2) - 3(2a + 1) = (2a + 1)[(a - 2) - 3] = (2a + 1)(a - 5)$.

$2x(x + 4) + (x - 3)(x + 4) - (x + 4)(1 + 3x) = (x + 4)[2x + (x - 3) - (1 + 3x)]$

$= (x + 4)(2x + x - 3 - 1 - 3x) = (x + 4) \times (-4) = -4(x + 4)$.

— Ce peut être un facteur commun caché par un changement de signe ou par une multiplication supplémentaire.

$(5 - x)(x + 7) + (x - 5)(1 - 3y) = (5 - x)(x + 7) - (5 - x)(1 - 3y)$

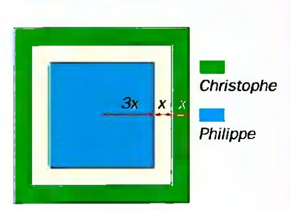
(on a remplacé le facteur $(x - 5)$ par son opposé $(5 - x)$, mais on a compensé ce changement de signe par la transformation du + en –)

$(5 - x)[(x + 7) - (1 - 3y)] = (5 - x)(x + 3y + 6)$.

Drôles de champs...

Le champ de Christophe a une drôle de forme, pas très commode à cultiver... mais il se console, en pensant qu'au moins, le sien est plus grand que celui de Philippe.

■ ***Le calcul et certaines factorisations vous dirons si Christophe a raison.***



En l'absence de facteur commun aisément reconnaissable, on peut tenter de reconnaître :

— Le développement du carré d'une somme.

$4x^2 + 4x + 1 = (2x + 1)^2$.

— Le développement du carré d'une différence.

$25a^2 - 40ab + 16b^2 = (5a - 4b)^2$.

— Une différence de carrés.

$9y^2 - 4 = (3y - 2)(3y + 2)$.

$(x + 1)^2 - (2 + 3x)^2 = [(x + 1) + (2 + 3x)][(x + 1) - (2 + 3x)]$

$= (4x + 3)(-2x - 1)$.

— Le développement du carré d'une somme *et* une différence de carrés.

$x^2 + 6x - 7 = x^2 + 6x + 9 - 16 = (x + 3)^2 - 4^2$

$= [(x + 3) + 4][(x + 3) - 4] = (x + 7)(x - 1)$.

— Le développement du carré d'une différence *et* une différence de carrés.

$$x^2 - 3x + 2 = x^2 - 2 \times \frac{3}{2}x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} + 2 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{2^2}$$

$$= \left[\left(x - \frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2}\right]\left[\left(x - \frac{3}{2}\right) - \frac{1}{2}\right] = (x - 1)(x - 2).$$

Attention aux pièges !

Une expression peut avoir une "tête" de développement de produit remarquable et ne pas en être un. $25a^2 + 40ab + 4b^2$ ressemble bien au développement de $(5a + 2b)^2$ mais ce n'est pas le cas car $(5a + 2b)^2 = 25a^2 + \mathbf{20}ab + 4b^2$.

On a :

$25a^2 + 40ab + 4b^2 = (5a + 2b)^2 + 20ab$.

LES NOMBRES FIGURÉS

Les pythagoriciens avaient l'habitude d'associer des figures aux nombres entiers. Et il est vrai que le travail sur certaines figures débouche sur des propriétés mathématiques intéressantes.



Généralisation

Généraliser la "propriété de l'escalier".

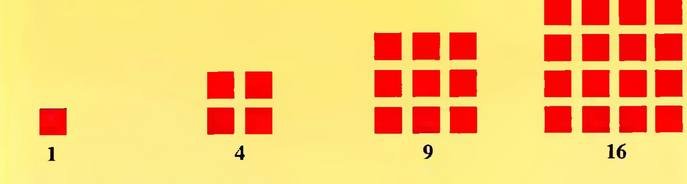
Combien vaut la somme des *n* premiers nombres entiers ?

$1 + 2 + 3 + \ldots + n$?

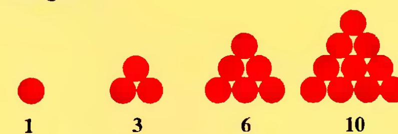
On dit que le jeune Gauss – qui sera un grand mathématicien (1777-1855) – étonna son instituteur en calculant de tête la somme des 100 premiers entiers à l'âge de 9 ans (l'histoire ne dit pas s'il avait pensé à l'image de l'escalier).

Voir des formules

Il y a eu d'abord les nombres "carrés"



puis les nombres "triangulaires"



mais aussi les nombres "pyramidaux", "pentagonaux"...

On s'intéressent ici aux nombres **"triangulaires"** qui sont la somme d'entiers successifs.

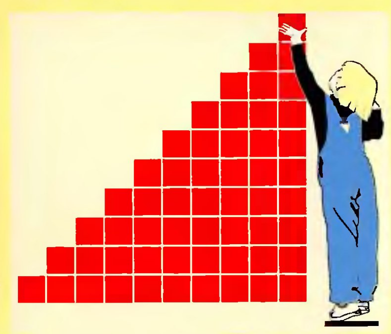
Combien font donc 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 ?

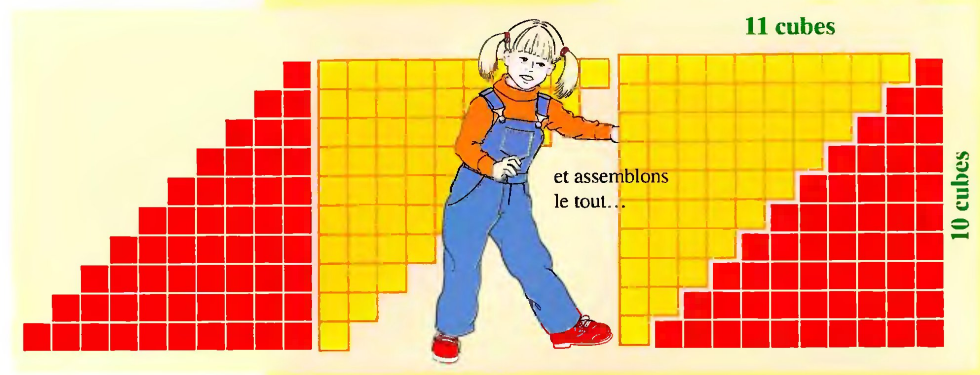
Imaginons qu'il s'agisse de petits cubes et que l'on mette l'une à côté de l'autre les piles de 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 cubes.

On forme ainsi un escalier de forme triangulaire.

Pour compter les cubes formant cet escalier, ajoutons-lui un escalier identique (ici représenté symétriquement en jaune).

Cela fait un rectangle de 10 unités de large et onze unités de long.





Deux fois la somme des nombres de 1 à 10 font donc 10×11.

Finalement : $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$.

UN CHIFFRE, UNE LETTRE, ET RÉCIPROQUEMENT

Les équations et leurs inconnues présentent parfois un aspect bien rébarbatif. Ainsi

$$\begin{cases} e+e=m+10 \\ 1+v+v=a+10 \\ 1+e+e=d+10 \\ a=1 \end{cases}$$

est un système de quatre équations à cinq inconnues plutôt désespérant. N'est-ce pas plus rigolo de proposer l'addition :

```
  EVE
+ EVE
 ADAM
```

En voiture

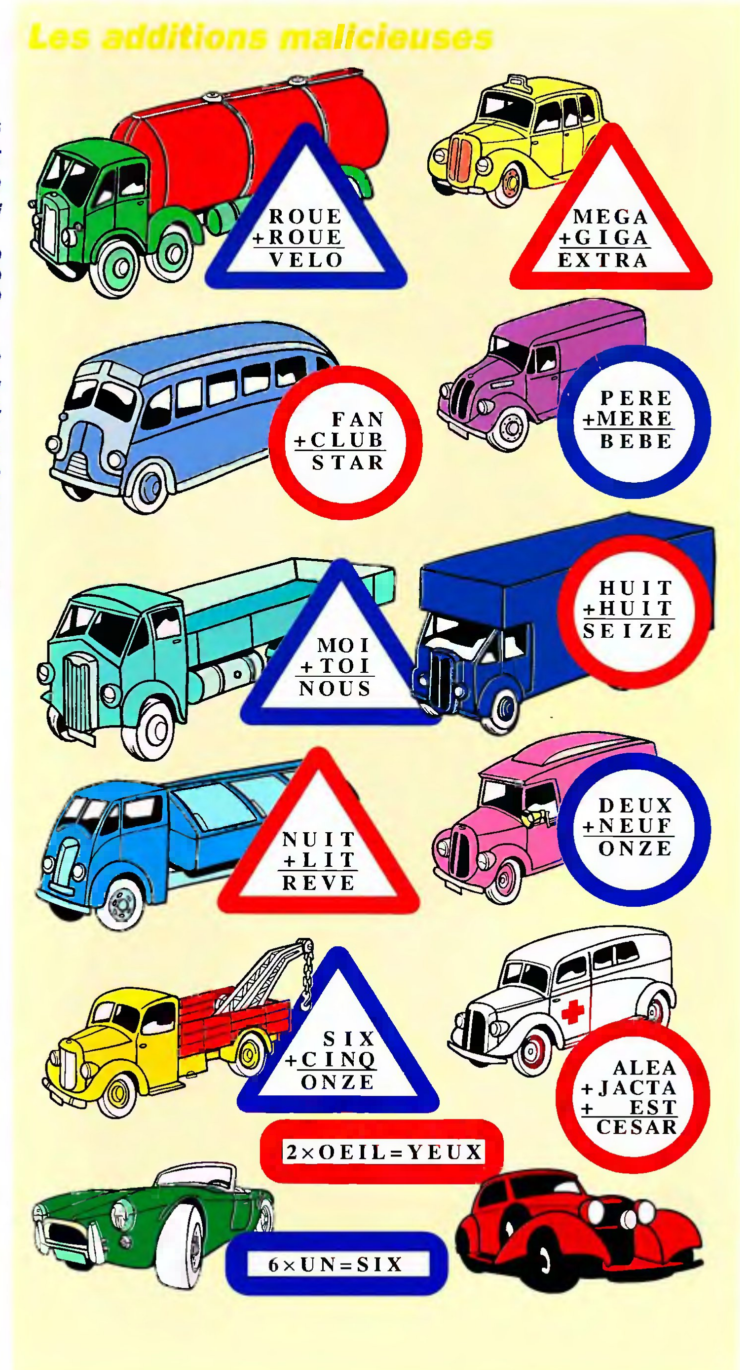
Dans chaque opération, une lettre représente un chiffre et deux lettres différentes représentent deux chiffres différents.
Retrouver les valeurs des lettres pour chacune des opérations.
Et pour ces trois-là, où les chiffres ont déjà remplacé les voyelles, retrouver aussi les mots entiers.

```
   H5MM1
+ F1MM1
  9M54R
```

```
  M3NG4R
+ M3NG4R
 GR7SS8R
```

```
   3N
+ P23
+ F93
 F0D0
```

Les additions malicieuses



Test 3

Pour chacune des 10 questions, indiquer la ou les bonnes réponses parmi A, B, C, D ou E

	Questions	A	B	C	D	E
1	Le quotient de la somme de x et de quatre par x vaut…	$\frac{4+x}{x}$	$x+\frac{x}{4}$	$\frac{x+x}{4}$	$\frac{5x}{4}$	$\frac{4}{x}+1$
2	Si a est l'inverse de l'opposé de b, alors le produit ab vaut…	0	1	rien de particulier	-1	ba
3	$a \neq 0$ et $b \neq 0$. Que vaut l'inverse de $\dfrac{a+b}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$?	$\frac{1}{2}$	ab	1	$\frac{1}{ab}$	$\frac{a^2+2ab+b^2}{ab}$
4	$9x^2-25$ vaut …	$(3x-5)^2$	$(3x+5)^2$	$(3x-5)(3x+5)$	$3x^2-5^2$	$(3x)^2-5^2$
5	Où peut-on voir le résultat d'un développement ?	$2x+6$	$4(x-3)$	x^2+3x	$(x+3)^2$	$(x+3)(x-3)$
6	Où peut-on voir le résultat d'une factorisation ?	$2x+6$	$4(x-3)$	x^2+3x	$(x+3)^2$	$(x+3)(x-3)$
7	Dans l'expression $(x-5)^2+3x-15$ on peut mettre en facteur…	3	x	$3x-15$	$3x-5$	$x-5$
8	$(x-9)^2$ c'est aussi…	x^2+9	x^2-81	$(x+9)(x-9)$	$x^2+81-18x$	$x^2+81x+18$
9	$(a+b)^2-(a-b)^2=\ldots$	a^2+b^2	$2a^2$	$2a^2+2b^2$	$2a^2b^2$	$4ab$
10	$(2+3(x\times(x+1)))=\ldots$	$2+3(x(x+1))$	$2+3x(x+1)$	$2+3x^2+x$	$2+x(3x+1)$	$2+3x+x$

THÈME 4

À la découverte de l'inconnue

Dans une égalité qui contient des lettres, quels nombres peut-on substituer aux lettres pour que l'égalité soit vraie ? C'est le vaste domaine des équations.
Contrairement à ce que pourrait penser une âme naïve, les équations ont été inventées pour résoudre des problèmes, et non l'inverse. Et ce qui est extraordinaire, c'est la fantastique efficacité que donne le simple remplacement d'un nombre inconnu par une lettre !

Équations

Équation vient du latin *aequus* qui signifie ***égal***. Une équation est une égalité contenant des lettres représentant des nombres inconnus.

De bonnes résolutions

Avec en tête le sens des opérations, avec en main des techniques de calcul littéral, les pieds appuyés sur les propriétés de l'égalité, nous voici prêts pour la cuisine des équations. La méthode : remplacer une égalité par une autre qui lui est équivalente (en étant de préférence plus simple).

Équation du premier degré

L'invention du formalisme algébrique a été un fantastique pas en avant pour résoudre les problèmes qui se posaient aux hommes. La "mise en équation" rend simple ce qui était compliqué. Vive les maths !

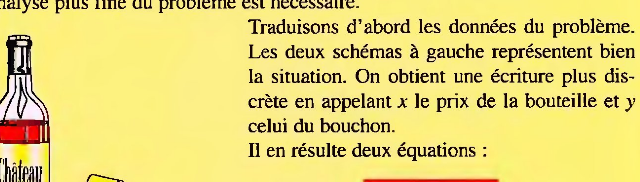
Système d'équations

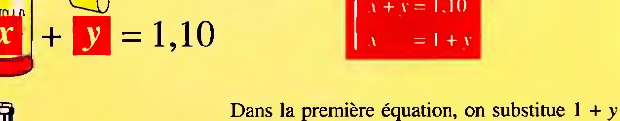
Si le problème a deux inconnues, il vaut mieux disposer de deux équations pour le résoudre.

Répondez vite, très vite

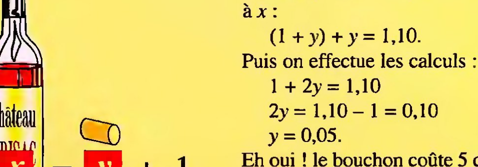
UNE BOUTEILLE ET SON BOUCHON coûtent 1 Franc et 10 centimes. La bouteille coûte 1 Franc de plus que le bouchon. Combien coûte le bouchon ?
Si vous avez répondu (très vite) 10 centimes, c'est que vous avez répondu trop vite. Une analyse plus fine du problème est nécessaire.

Traduisons d'abord les données du problème. Les deux schémas à gauche représentent bien la situation. On obtient une écriture plus discrète en appelant x le prix de la bouteille et y celui du bouchon.
Il en résulte deux équations :





Dans la première équation, on substitue $1 + y$ à x :
$(1 + y) + y = 1{,}10$.
Puis on effectue les calculs :
$1 + 2y = 1{,}10$
$2y = 1{,}10 - 1 = 0{,}10$
$y = 0{,}05$.
Eh oui ! le bouchon coûte 5 centimes et la bouteille, 1 Franc et 5 centimes.



Rendre à César

Dire de quelle(s) équation(s) chaque nombre est solution ?

nombres	*équations*
– 2	*$5x^2 = 11x + 6$ (I)*
1	*$x = 4$ (II)*
3/4	*$5x = 6$ (III)*
1,2	*$x^2 + x - 2 = 0$ (IV)*
	$16x^2 - 24x + 9 = 0$ (V)





DE BONNES RÉSOLUTIONS

4. 1 Le vocabulaire des équations

Une *équation* (à une inconnue) est une égalité qui contient une "*inconnue*" : un nombre désigné par une lettre (souvent la lettre x).

Une *solution* de l'équation est un nombre qui, substitué à la lettre, rend l'égalité vraie.

***Résoudre* une équation signifie "trouver toutes ses solutions" (en général parmi tous les nombres ; éventuellement dans un ensemble de nombre restreint : les nombres entiers, ou les nombres positifs par exemple).**

EXEMPLE
$x^2 - 3x = 2 - 4x$ est une équation d'inconnue x.
3 n'est pas une solution de cette équation : quand on remplace x par 3 dans le membre de gauche, on trouve 0 et dans le membre de droite, on trouve (– 10).
Le nombre 1 est une solution car on trouve (– 2) dans les deux membres en substituant 1 à x.
Une autre solution est (– 2).

Il n'y a pas besoin de savoir résoudre une équation pour tester si, oui ou non, un nombre donné est solution. Et il est toujours possible d'effectuer une vérification quand on pense avoir trouvé une solution.

L'habitude de représenter les inconnues par des lettres de la fin de l'alphabet et les données par des lettres du début s'est prise au XVIIe siècle avec Descartes (*La géométrie*, 1627).

4. 2 Les équations de base

Pendant longtemps, vous avez résolu, comme Monsieur Jourdain, des équations sans le savoir.
Chercher "ce qu'il faut ajouter à a pour trouver b", c'est résoudre l'équation $x + a = b$.
On a créé l'opération soustraction pour cela.

Si a et b sont deux nombres, alors : $x + a = b$ équivaut à $x = b - a$.

Chercher "ce par quoi il faut multiplier a pour trouver b ", c'est résoudre l'équation $ax = b$. On a créé l'opération division pour cela.

Si a et b sont deux nombres (avec $a \neq 0$), alors : $ax = b$ équivaut à $x = \frac{b}{a}$.

❊ ❊ ❊
+ 6 1 4
1 0 0 0

Trouver ❊❊❊, c'est résoudre l'équation $x + 614 = 1\,000$.

5 2
– ⇨⇨
3 4

Trouver ⇨⇨, c'est résoudre l'équation $52 - x = 34$.

✪ ✪
× 6 4
1 0 2 4

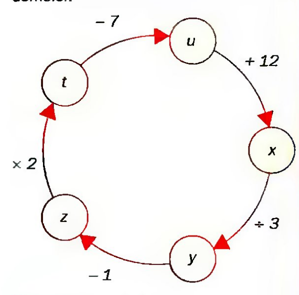
Trouver ✪✪, c'est résoudre l'équation $64x = 1\,024$.

4. 3 Les propriétés de l'égalité

Les techniques de résolution pour des équations plus compliquées que ces deux-là s'appuient sur les propriétés de l'égalité.

Une égalité vraie reste vraie :
— si on ajoute ou soustrait un même nombre aux deux membres.
— si on multiplie ou divise les deux membres par un même nombre non nul.
Enfin, si on ajoute ou si on soustrait membre à membre deux égalités vraies, on obtient une égalité vraie.

Circuit
Voici une situation qui, malgré ses 5 inconnues apparentes et sa présentation peu usuelle n'est pas si difficile à démêler.



Trouver x, y, z, t, u.

ÉQUATION DU PREMIER DEGRÉ

4. 4 Équation du type ax + b = cx + d

Soit à résoudre l'équation :

$$7x - 3 = 2x + 12.$$

On ajoute 3 aux deux membres afin d'isoler le terme "$7x$" dans le membre de gauche.

$$7x = 2x + 15$$

On soustrait $2x$ aux deux membres afin d'isoler le terme "15" dans le membre de droite.

$$5x = 15.$$

On est ramené à une équation du type $ax = b$.

La solution est $x = \dfrac{b}{a}$.

$$x = \frac{15}{5} = 3.$$

L'équation donnée a une solution : le nombre 3.

Il n'est pas interdit de contrôler sa réponse :
si $x = 3$, $7x - 3 = 21 - 3 = 18$ et $2x + 12 = 6 + 12 = 18$. Ça marche !

Toutes les égalités écrites ci-dessus sont des équations équivalentes, ce qui signifie que tout nombre solution de l'une est aussi solution des autres. Elles ont le même ensemble de solutions.

La poursuite infernale
Une tortue et un escargot filent en ligne droite vers un champ de laitues. L'escargot fait 1,5 cm/s, la tortue 4 cm/s. La tortue est partie du même point que l'escargot mais avec une heure de retard.
Combien de temps la tortue mettra-t-elle à le rattraper ? Montrer que l'équation à résoudre est
$$4t = 1,5(3\,600 + t).$$
Résoudre cette équation.



4. 5 Autres équations du premier degré

Vous rencontrerez des équations du premier degré plus compliquées que celle ci-dessus, mais finalement équivalentes. Il vous faudra alors utiliser vos connaissances en calcul littéral (développer, réduire) pour vous ramener à une équation plus facile à résoudre.

EXEMPLE

Soit à résoudre l'équation :

$$2(x - 5) + 7x = 5 - (3 + x).$$

On supprime les parenthèses à l'aide des propriétés adéquates (voir 3.5 et 3.7) :

$$2x - 10 + 7x = 5 - 3 - x.$$

On réduit dans chaque membre ce qui peut l'être.

$$9x - 10 = 2 - x.$$

Et c'est parti : on ajoute x aux deux membres.

$$10x - 10 = 2.$$

Puis on ajoute 10 aux deux membres :

$$10x = 12$$

Reste à conclure :

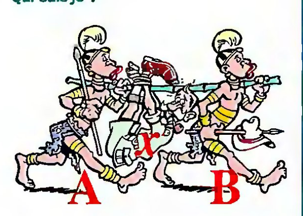
$$x = \frac{12}{10} = \frac{6}{5} = 1,2.$$

L'équation ci-dessus a une solution : le nombre 1,2.

■ **Mon carré est égal à mon double.**
Qui suis-je ?



■ **A me dépasse de 2. Multiplié par 2 et ajouté à 1, j'égale B.**
$A^2 = B^2$ et je suis positif.
Qui suis-je ?



4. 6 Produit nul

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul.

Si a et b sont des nombres, alors
$a \times b = 0$ si et seulement si $a = 0$ ou $b = 0$.

4. 7 Équations produit

La propriété précédente permet de résoudre certaines équations, appellées parfois "équations produit" qui permettent de se ramener à plusieurs équations du premier degré.

EXEMPLE
Soit à résoudre l'équation :

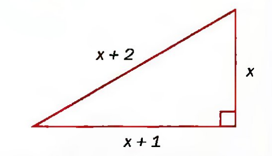
$$(x + 3)(2x + 8) = 0.$$

Le membre de gauche est un produit de deux facteurs : $(x + 3)$ et $(2x + 8)$.
Ce produit sera nul si et seulement si :
ou bien $x + 3 = 0$, ou bien $2x + 8 = 0$.
En résolvant chacune de ces petites équations, on trouve les deux solutions de l'équation de départ : les nombres -3 et -4.

Une méthode universelle : Cette "propriété du produit nul" est à l'origine d'une méthode universelle pour résoudre des équations : les mettre sous la forme d'un produit de facteurs égal à zéro. D'où l'importance des techniques de factorisation rappelée dans le thème précédent (3.22).

Vexé
"Je suis ulcéré", dit un nombre entier. "Le carré de mon suivant dépasse de quinze mon propre carré !"
■ ***Mais quel est donc l'entier qui s'exprime en ces termes ?***

Rectangle



Trouver un triangle rectangle dont les côtés sont mesurés par des entiers consécutifs, c'est résoudre l'équation $(x + 2)^2 = (x + 1)^2 + x^2$.
■ ***Vérifiez que cette équation peut s'écrire $(x + 1)(x - 3) = 0$, et la résoudre ?***

4. 8 Résoudre une équation du second degré

Pour résoudre l'équation-produit précédente, on peut être tenté de développer le membre de gauche . On aboutit en procédant ainsi, à l'équation $2x^2 + 14x + 24 = 0$, effectivement équivalente à l'équation donnée. Le problème, c'est que cette équation est du second degré (elle contient des x^2) et on n'a pas, au niveau du collège, les outils pour résoudre ce type d'équation.
Il faut donc vous résigner à cette triste constatation : les seules équations du second degré dont la résolution est à votre portée sont des équations que vous réussirez à ramener à un produit nul.
D'où la règle de conduite (provisoire) :
Devant une équation du second degré, l'écrire sous la forme $A(x) = 0$ puis essayer de factoriser $A(x)$.

EXEMPLE
Résoudre l'équation $(x + 1)^2 = 4(x + 1)$.

Cette équation est équivalente à $(x + 1)^2 - 4(x + 1) = 0$,
le premier membre se factorise $(x + 1)[(x + 1) - 4] = 0$,
$(x + 1)(x - 3) = 0$.
L'équation donnée, équivalente à cette équation-produit, a deux solutions : les nombres -1 et 3.

Si cela ne vous convient pas, persuadez votre grande sœur de vous donner la recette miracle des équations du second degré ou lisez des livres de lycée.

SYSTÈME D'ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ

4. 9 Une équation du premier degré et deux inconnues

Une équation du premier degré à deux inconnues x et y, est une équation du type $ax + by = c$.

Elle a en général plusieurs solutions.

On peut en effet choisir une valeur de son choix pour l'une des inconnues (x par exemple) et, en substituant, trouver la valeur correspondante pour y. On trouvera ainsi autant de couples (x, y) solutions que l'on en désire.

Mieux : si on représente tous ces couples solutions comme des points du plan repéré, ils formeront une droite : si $b \neq 0$, ce sera la droite d'équation $y = \frac{-a}{b}x + \frac{c}{b}$.

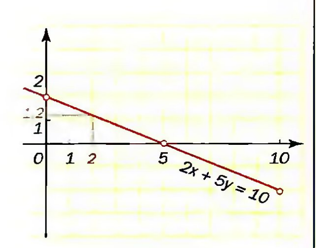
EXEMPLE

Soit l'équation à deux inconnues $2x + 5y = 10$.
Pour trouver une solution, je choisis la valeur de x librement , mettons $x = 2$.
Je remplace x par la valeur choisie et je résous l'équation d'inconnue y ainsi fabriquée : $4 + 5y = 10$.

Je trouve $y = \frac{6}{5} = 1{,}2$.

Un couple solution de l'équation est (2 ; 1,2).

Je trouve ainsi une infinité de couples solutions (0 ; 2), (5 ; 0),(10 ; – 2) ... Tous ces couples sont les coordonnées de points de la droite d'équation $y = -\frac{2}{5}x + 2$.



Systèmes

Dans tous ces systèmes, y en a-t-il :
sans solution ?
avec une infinité de solutions ?
avec (0 ; 0) comme solution ?

(I) $\begin{cases} x - y = 3 \\ y - x = -3 \end{cases}$

(II) $\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$

(III) $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = -3 \end{cases}$

(IV) $\begin{cases} x + y = 3 \\ -x - y = 3 \end{cases}$

(V) $\begin{cases} x = y \\ x - y = 0 \end{cases}$

4. 10 Système d'équations du premier degré à deux inconnues

Résoudre un système d'équation du premier degré à deux inconnues, c'est chercher les solutions communes à deux équations du modèle précédent. Un tel système se présente ainsi :

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

où a, b, c, a', b' et c' sont des nombres donnés et x et y sont les deux inconnues.

L'accolade entre les deux équations a une signification précise :
elle remplace le mot "et".

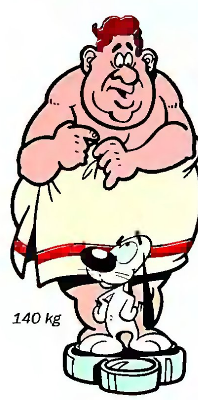
Si l'on pense en termes d'équation de droite, on comprend que, généralement, un tel système sera vérifié par un couple de nombres et un seul (deux droites ont généralement un seul point commun, elles sont sécantes).
Plus rarement le système n'aura pas de solution (les droites seront strictement parallèles) ou une infinité (quand les droites seront confondues, ce qui se voit sur leurs équations)

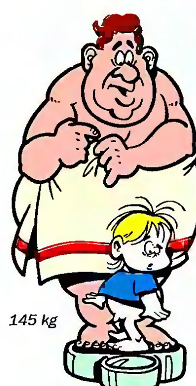
Il y a deux méthodes concurrentes pour résoudre ce genre de système.
L'une et l'autre ont pour objectif de se débarrasser (provisoirement) d'une des inconnues.
Elles font l'objet des deux paragraphes suivants.

Des pattes, des pattes
Derrière la palissade, il y a des kangourous et des rhinocéros. J'ai compté 78 pattes et 54 oreilles.
■ ***Combien y a-t-il d'animaux de chaque espèce ?***



La balance
■ ***Combien pèsent le gros Dédé, le petit Francis et le chien Boudin ?***







4. 11 Résolution par substitution

Principe directeur : isoler x ou y dans l'une des équations puis substituer dans l'autre afin d'obtenir une équation à une seule inconnue.

EXEMPLE

Résoudre le système $\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x - 3y = -11 \end{cases}$.

On transforme la première équation en une équation équivalente :
$x = 7 - y$.
On remplace x dans la deuxième équation par l'écriture ainsi trouvée.
On substitue $7 - y$ à x :
$2(7 - y) - 3y = -11$.
On est content car cette équation à une inconnue permet de trouver y.
$14 - 2y - 3y = -11$
$14 - 5y = -11$
$-5y = -25$
$y = 5$
et puisque $x = 7 - y$, on peut alors trouver x :
$x = 2$.
On vérifie que le couple (2, 5) est solution de chaque équation du système :
$\begin{cases} 2 + 5 = 7 \\ 2 \times 2 - 3 \times 5 = -11 \end{cases}$

On peut donc affirmer que *la* solution du système donné est le couple de nombres (x, y) égal à (2, 5).

4. 12 Résolution par combinaison

Principe directeur : multiplier judicieusement chaque équation, afin qu'en ajoutant membre à membre les deux équations, une des deux inconnues s'élimine.

EXEMPLE

Résoudre le système $\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x - 3y = -11 \end{cases}$.

On multiplie par 3 la première équation. Cela donne le nouveau système, équivalent au premier :

$\begin{cases} 3x + 3y = 21 \\ 2x - 3y = -11 \end{cases}$.

En ajoutant membre à membre ces deux égalités, on trouve :
$5x = 10$ et donc $x = 2$.

On multiplie par (-2) la première équation. Cela donne le nouveau système, équivalent au premier :

$\begin{cases} -2x - 2y = -14 \\ 2x - 3y = -11 \end{cases}$.

En ajoutant membre à membre ces deux égalités, on trouve :
$-5y = -25$ et donc $y = 5$.
On vérifie que le couple (x, y) égal à (2, 5) est solution de chaque équation du système.
On annonce fièrement : le système a une solution (2 ; 5).
Il est heureux que les deux méthodes donnent la même solution.

En famille

Il y a 6 ans, mon frère avait deux fois mon âge. Dans 5 ans, nous aurons ensemble 40 ans.

■ ***Quel est mon âge ?***



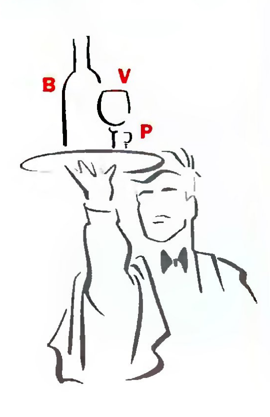
■ ***Moyenne***



Deux verres ça va...

Trois petits verres P remplissent le verre V. Il faut 8 verres V et un petit verre P pour remplir la bouteille B d'un litre.

■ ***Quelle est la contenance des verres V et P ?***



4. 13 Pour mettre un problème en équation

— Prendre conscience de ce qu'on cherche et donner un nom à la quantité cherchée (ou aux quantités cherchées s'il y en a plusieurs). Soit x ...

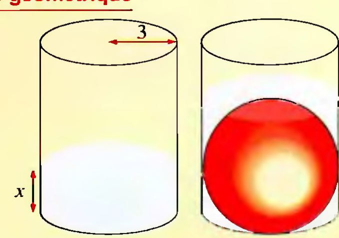
— Traduire la (les) phrase(s) de l'énoncé par une (des) équation(s).

— Résoudre l' (les) équation(s) écrite(s).

— Répondre par une phrase au problème posé.

EXEMPLE

"Donnez-moi deux pains et une baguette, s'il vous plaît" dit Jean au boulanger. Et il paie 14,60 F. "Pardon, je voulais deux baguettes et un pain". Le boulanger rend 1 F à Jean. *Combien le boulanger vend-il son pain et sa baguette ?*



Donner un nom à ce qu'on cherche : Soit x le prix du pain et y le prix de la baguette.
Traduire les deux phrases de l'énoncé par deux équations

$$\begin{cases} 2x + y = 14{,}60 \\ x + 2y = 13{,}60 \end{cases}$$

Résoudre le système obtenu par la méthode de son choix.
On trouve $x = 5{,}2$ et $y = 4{,}2$.
Répondre par une phrase : le pain coûte 5,20 F et la baguette 4,20 F.

On pourrait aussi poser le système : $\begin{cases} 2x + y = 14.60 \\ x - y = 1 \end{cases}$

4. 14 Mise en équation : un exemple géométrique

On plonge une sphère de 3 cm de rayon dans un verre cylindrique de 3 cm de rayon, qui contient de l'eau. L'eau monte alors juste au ras de la sphère.

Quelle était la hauteur d'eau au départ dans le verre ?

— Donner un nom à ce qu'on cherche :
Soit x la hauteur d'eau dans le cylindre.

— Traduire la situation par une égalité.
Le volume eau + boule est exactement le volume d'un cylindre de rayon 3 cm et de hauteur 6 cm.

$$(\pi \times 3^2 \times x) + \left(\frac{4}{3} \times \pi \times 3^3\right) = \pi \times 3^2 \times 6.$$

Nettoyer un peu l'équation : $9\pi x + 36\pi = 54\pi$.
Diviser les deux membres par 9π : $x + 4 = 6$.

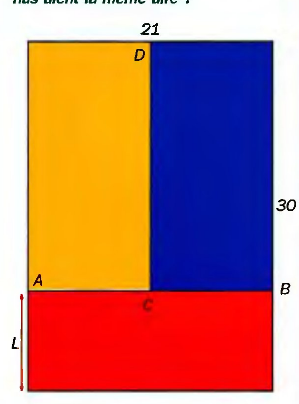
— Résoudre : on trouve $x = 2$.

— Répondre par une phrase : la hauteur d'eau initiale dans le verre était de 2 cm (seulement). Accessoirement on s'aperçoit qu'une sphère de rayon 3 cm a le même volume qu'un cylindre de même rayon et de hauteur 4 cm.

Aires égales

Prendre une feuille 21 × 30 et tracer [AB] et [CD] ((CD) est la médiatrice de [AB]).

■ ***Comment doit-on choisir la longueur L pour que les trois rectangles obtenus aient la même aire ?***



4. 15 Un exercice-type : compter les moutons

Le petit berger a un troupeau de 31 moutons. Il a compté en tout 130 pattes. Il faut vous dire que le petit berger a dans son troupeau des moutons à six pattes. Mais combien a-t-il au juste de moutons ordinaires et combien de moutons à six pattes?

Voici deux manières de mathématiser ce problème. Elles ne sont pas très différentes en réalité.

Première méthode :

Une traduction naturelle du problème conduit à deux inconnues puisqu'on cherche deux choses.

Soit x le nombre de moutons ordinaires et y le nombre de moutons à six pattes.

On traduit par des égalités les phrases de l'énoncé.

Il y a 31 moutons : $x + y = 31$

Il y a 130 pattes : $4x + 6y = 130$

On obtient ainsi un système d'équations.

On multiplie par – 4 la première équation et on ajoute membre à membre.

$$-4x - 4y = -124$$
$$4x + 6y = 130.$$

On obtient donc $2y = 6$ et $y = 3$.

Alors puisque $x + y = 31$ et $y = 3$, c'est que $x = 28$.

Réponse : il y a 3 moutons à six pattes et 28 moutons normaux dans la bergerie du petit berger.

Deuxième méthode :

Une traduction un peu moins naturelle permet d'éviter d'avoir deux inconnues.

Soit x le nombre de moutons ordinaires.

Le nombre de moutons à six pattes est donc $(31 - x)$ et le total de130 pattes se traduit par l'équation à une inconnue :

$$4x + 6(31 - x) = 130$$

(équation qui n'est autre que celle qu'on aurait obtenu en résolvant le système ci-dessus par substitution, en remplaçant y par $(31 - x)$).

En développant, l'équation devient :

$$186 - 2x = 130.$$

On soustrait 186 aux deux membres, on obtient :

$$-2x = -56 \quad \text{et} \quad x = 28.$$

Ce qui rejoint agréablement la réponse précédente.



Dans cette situation, on a :

- *mis le système en équation de deux manières.*
- *bien appliqué les propriétés de l'égalité.*
- *résolu un système du premier degré par combinaison.*
- *résolu une équation du premier degré.*

UNE LOGIQUE IMPLACABLE

À partir de quelque chose de faux, les mathématiciens peuvent démontrer à peu près n'importe quoi. La preuve...

Si 2 = 3, je suis le père Noël !



Reste à prouver que 2 = 3.
Eh bien, soit $x = 3$, $y = 2$ et $z = 1$.
Voici une succession d'égalités toutes plus justifiées les unes que les autres :

$$x = y + z.$$

Multiplions chaque membre par $x - y$

$$x(x - y) = (y + z)(x - y)$$
$$x^2 - xy = xy + zx - y^2 - yz$$
$$x^2 - xy - zx = xy - y^2 - yz$$
$$x(x - y - z) = y(x - y - z).$$

Divisons chaque membre par $x - y - z$.
On trouve $x = y$.
Ce qui donne $3 = 2$.
Étonnant non ?

À l'impossible, nul n'est tenu

En fait, comme vous le savez, je ne suis pas le père Noël. C'est donc qu'il y a quelque chose qui cloche quelque part. Pour le découvrir, il vous faut étudier ligne après ligne la "démonstration" en bas de page. Et voir si, par hasard, une opération impossible n'aurait pas été effectuée...

Un pour tous et tous pour un

Et si cela vous amuse, voici une autre "démonstration" d'un résultat analogue.

Supposons que $x^2 + x + 1 = 0$.

On a donc $x^2 = -x - 1$, en multipliant par x : $x^3 = -x^2 - x$.

En substituant $(-x - 1)$ à x^2, on a $x^3 = x + 1 - x$, donc $x^3 = 1$.

Or, il n'y a qu'un seul nombre dont le cube est 1. Donc $x = 1$.

En portant dans l'hypothèse initiale, cela donne $3 = 0$!

Cela prouve que je suis non seulement le Père Noël mais aussi les quatre mousquetaires !

A + X = B

Pour les amateurs d'équations du premier degré

Les dates importantes

Voici quatre questions de culture générale.

- Les résultats des opérations à trous vous aident à y répondre.



UN MESSAGE SECRET À DÉCODER

Douze équations ! Pas une de moins pour S. Holmes. Mais le jeu en vaut la chandelle. La phrase à découvrir est la plus recherchée du monde.



La clé de l'énigme

Ce qu'il faut absolument savoir pour découvrir le message :

$a \times x = b$

➡ $x = \frac{b}{a}$

Test 4

Pour chacune des 10 questions, indiquer la ou les bonnes réponses parmi A, B, C, D ou E

	Questions	A	B	C	D	E
1	Quelle est la solution de l'équation $2(x-7)=x-4$?	7	4	10	aucune	7 et 4
2	Trouver les équations sans solution.	$x^2=25$	$0x=2$	$0x=0$	$2x=5$	$x^2=-25$
3	Où voit-on une solution sans équation ?	8	$x+3$	dans de nombreux problèmes	cette question est stupide	$x+3=5$
4	Où voit-on une équation ?	8	$x+3$	$n-7=17$	$5=3y$	$x+3=5$
5	Quelles sont les équations dont 2 est solution ?	$\frac{x-2}{x+2}=0$	$\frac{x-2}{x-2}=1$	$\frac{x+2}{x+2}=1$	$\frac{2x+2}{x+4}=1$	$\frac{2x-2}{x-4}=1$
6	Quand j'aurai gagné 27 F de plus, mon capital aura triplé. J'ai donc…	81 F	17 F	13,50 F	9 F	4.50 F
7	Où voit-on une solution de l'équation $2x-y=-3$?	(0 ; – 3)	(0 ; 3)	(1 ; – 1)	(– 1 ; 1)	(5 ; 7)
8	Quel(s) système(s) décri(ven)t la situation ? *aire = 10*, *périmètre = 14* (rectangle de côtés x et y)	$\begin{cases}x+y=14\\xy=10\end{cases}$	$\begin{cases}x+y=7\\xy=5\end{cases}$	$\begin{cases}x+y=7\\xy=10\end{cases}$	$\begin{cases}x+y=28\\xy=10\end{cases}$	$\begin{cases}2(x+y)=14\\xy=10\end{cases}$
9	Le système $\begin{cases}x^2=x\\x+y+5=0\end{cases}$	a pour solution (1 ; 6)	a pour solution (1 ; – 6)	a pour solution (– 1 ; – 6)	a pour solution (0 ; – 5)	n'a pas de solution
10	Deux nombres ont leur somme, leur produit et leur quotient égaux.	Ils n'existent pas	Ce sont 0 et 1	Ce sont 1 et – 1	Ce sont 0,5 et – 1	Il y a plusieurs solutions

THÈME 5

Des grandeurs proportionnelles

Si vous courez deux fois plus vite, vous ferez deux fois plus de chemin.
Si vous achetez trois fois moins d'eau minérale, vous paierez trois fois moins cher.
Si vous travaillez cinq fois plus longtemps, vous ferez peut-être cinq fois plus de choses...
Toutes ces situations ont un point commun : elles pourront se traduire par un même modèle mathématique, appelé ***"proportionnalité"****.*

La proportionnalité

Proportion, —nel, —nalité : du latin *pro* (pour) *portio* (part, portion) Distribuer proportionnellement, c'est donner à chacun la part qui lui revient...

Les méthodes de calcul

Selon la situation il faut savoir choisir la méthode la plus efficace entre le tableau de proportionnalité, les combinaisons, le calcul du coefficient, la règle de trois...

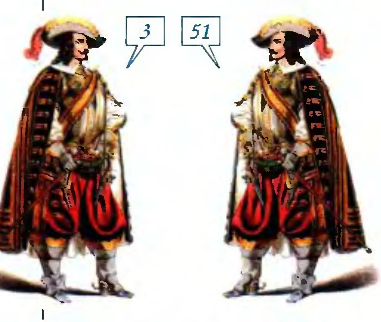
Le coefficient de proportionnalité

C'est lui qui permet de mieux comprendre. Et même lorsqu'il reste invisible dans des "proportions", il reste la clé de la situation.

Les pourcentages

Tout ira mieux le jour où chacun aura compris que prendre ✪✪ % de quelque chose, c'est multiplier ce quelque chose par 0,✪✪ !

La règle de trois (mousquetaires)



TOUT LE MONDE a entendu parler de la **règle de trois**. C'est un "truc" de calcul qui marche bien dans les situations de proportionnalité.
Mais d'où vient cette expression ?
De ce que cette règle permet de résoudre des problèmes dans lesquels on connaît **trois** nombres et il s'agit d'en trouver un **quatrième**. C'est comme les trois mousquetaires : ils en cachent toujours un quatrième !

Voici un exemple : "**3** bouteilles valent **51** F, combien valent **5** bouteilles ?
Le truc consiste à dire :
"Si **3** bouteilles valent **51** F,
alors 1 bouteille vaut 3 fois moins,
c'est-à-dire 17 F ;
et **5** bouteilles valent 5 fois plus,
soit **85** F".
Mais attention !
Il y a des méthodes parfois beaucoup plus simples pour résoudre des problèmes analogues...

La proportionnalité n'est pas universelle. Il y a des situations dans lesquelles il serait catastrophique d'utiliser ses propriétés sans réfléchir.



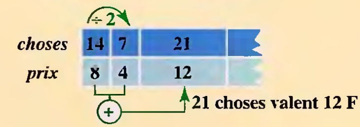
LES MÉTHODES DE CALCUL

5. 1 Propriétés des combinaisons

Intéressons-nous à deux grandeurs associées dans une relation de proportionnalité : si l'une est multipliée ou divisée par par un certain nombre, l'autre l'est aussi ; et si deux valeurs de l'une s'ajoutent ou se soustraient, il en est de même de l'autre.

Plus synthétiquement, on dit que "si x est associé à y et si u est associé à v par une relation de proportionnalité, alors toute combinaison de x et u est associée à la même combinaison de y et v".

Schématiquement, il est souvent très commode et efficace de faire un TABLEAU DE PROPORTIONNALITÉ :



1ère grandeur	x	u	$x + u$	$2x - u$	$x + 3u$
2e grandeur	y	v	$y + v$	$2y - v$	$y + 3v$

EXEMPLE : 14 *choses valent* 8 F. *Combien valent* 21 *choses ?*

choses	14	7	21
prix	8	4	12

÷ 2 ; + ; **21 choses valent 12 F**

Traduction du schéma :
- 2 fois moins de choses valent 2 fois moins
- une somme de choses (14 + 7) vaut la somme de leurs prix (8 + 4)

5. 2 Le coefficient de proportionnalité

Si deux grandeurs sont proportionnelles, alors les valeurs de la deuxième s'obtiennent en multipliant les valeurs de la première par un nombre appelé COEFFICIENT DE PROPORTIONNALITÉ.

La connaissance de deux valeurs associées, x et y, permet de calculer ce coefficient.

Dans l'exemple précédent, on a $y = ax$ et $8 = a \times 14$. Donc $a = \frac{8}{14} = \frac{4}{7}$.

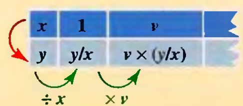
Le nombre correspondant à 21 est le nombre v tel que $v = \frac{4}{7} \times 21$. Finalement $v = 12$.

La lumière du soleil et les ondes radio mettent 8 minutes 20 secondes pour parcourir les 150 millions de kilomètres qui nous séparent du soleil.

■ **Quelle distance parcourt la lumière en 1 seconde ?**

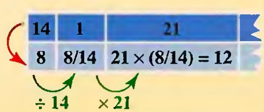
5. 3 La règle de trois

Si x choses valent y, alors 1 chose vaut x fois moins, ; et v choses valent v fois plus.



x	1	v
y	y/x	$v \times (y/x)$

$\div x$; $\times v$



14	1	21
8	8/14	21 × (8/14) = 12

÷ 14 ; × 21

Cette règle n'est que la mise en œuvre de combinaisons particulières.

Le premier homme ayant posé le pied sur la Lune envoya un cri par message radio "Hurrah !".
Les ondes radio ont la même vitesse que la lumière.

■ **Combien de temps mit ce cri pour parvenir à la Terre (située à 400 000 km de la Lune) ?**

5. 4 Les produits en croix

Si deux grandeurs sont proportionnelles, x étant associé à y et u à v, alors on a $x \times v = u \times y$.

Schématiquement  $xv = uy$.

x	u
y	v

EXEMPLE : On doit trouver le nombre v tel que

14	21
8	v

$14v = 21 \times 8$, d'où $v = 12$.

Quelle est l'explication du paradoxe énoncé par la souris ?



5. 5 Quelle est la meilleure méthode ?

- **Le truc le plus rapide ?**
— C'est la technique des produits en croix.

- **Le truc le plus sûr ?**
— C'est de remplir un tableau ligne après ligne. On peut facilement vérifier ses calculs et les opérations ont toujours une signification pratique.

- Les virtuoses de la proportionnalité utilisent aussi une règle astucieuse qu'ils appellent la FAUSSE SUPPOSITION.
Ainsi disent-ils, dans le même exemple que précédemment :
"Si 14 choses valaient par exemple 2 F alors 21 choses vaudraient 3 F.
Or il ne valent pas 2 F, mais 8 F, c'est-à-dire 4 fois plus.
Donc 21 choses valent 3 × 4, c'est-à-dire 12 F".

- Dans tous les cas un tableau de proportionnalité résume bien les informations et permet de mieux présenter les calculs.

x	$2x$	$\frac{x}{3}$	$\frac{x}{x}$	1	$1 \times v$	x'	$x + x'$	$x - x'$
y	$2y$	$\frac{y}{3}$	$\frac{y}{x}$	$\frac{y}{x}$	$\frac{y}{x}v$	y'	$y + y'$	$y - y'$



5. 6 Un exemple type : *quel est le prix du pétrole ?*

Si le pétrole vaut 20 dollars le baril de 170 litres, combien cela fait-il en francs par litre ?

Le prix du pétrole, en francs, est proportionnel au prix en dollars. En effet, le prix en dollars d'une certaine quantité de pétrole, est évidemment proportionnel au volume du pétrole. Et tout volume de pétrole est évidemment proportionnel au prix en francs.

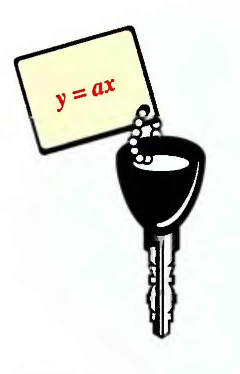
La présentation en tableau permet de mener très vite les calculs nécessaires.
Un baril vaut 170 litres et
1 $ = 5 F.
Les tableaux suivants se remplissent ligne après ligne ; et la justification du calcul est donnée dans l'interligne.
(On a effectué les opérations
170 ÷ 20 = 8,5 et 5 ÷ 8,5 = 0,6.)

Prix en dollars	Quantité	Prix en francs
20 $ pour	un baril	
20 $ pour	170 litres	
	× 1/20	
1 $ pour	8,5 litres	
	8,5 litres	pour 5 F
× 1/8,5		
	1 litre	pour 0,60 F

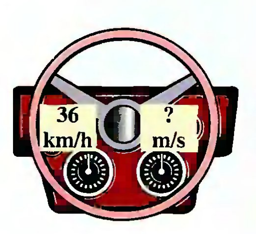
Et si le dollar ne vaut pas 5 F mais 6 F ?
Un tableau de proportionnalité suffit encore. En effet, le prix en francs par litre est évidemment proportionnel au taux de change.

	Taux $/F	Prix du pétrole en F/litre
	5	0,60
÷ 5	1	0,12
× 6	6	0,72

Dans cette situation, on a utilisé successivement :
- *Les propriétés de la proportionnalité (rappelées dans la définition en haut de page.) Ces propriétés sont exploitées dans les calculs sous forme de **tableau**.*
- *Un raisonnement de **fausse supposition** : les calculs sont faits pour un change de 5F/$ et auront servi même si ce change a une autre valeur.*
- *Une **règle de trois**, qui se résume à un passage intermédiaire par le nombre 1.*

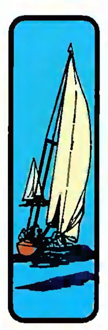


Il est souvent utile, dans la vie courante, de savoir ce que font 36 km/h en mètres par seconde.



Voiture représentée à l'échelle 1/2 000





Alice Math-Hello a battu son record de la traversée de l'Atlantique en parcourant 4 800 km en 10 jours et 12 h. Sachant que 20 nœuds correspondent à 37 km/h.

■ ***Quelle a été sa vitesse moyenne (en nœuds) ?***

■ LE COEFFICIENT DE PROPORTIONNALITÉ

5. 7 La formule passe-partout

Le nombre *a* est le COEFFICIENT DE PROPORTIONNALITÉ entre X et Y lorsque les valeurs de Y s'obtiennent à partir des valeurs de X, en les multipliant par *a* :

$$Y = aX.$$

EXEMPLES

a) 2 kilogrammes de pommes coûtent 5,40 francs.
Combien coûtent 5 kilogrammes ?

Le coefficient de proportionnalité faisant passer du poids des pommes (K) à leur prix (P) est le *prix au kilo*. On a ici : P = 2,70 × K.
Donc 5 kilogrammes coûtent 2,70 × 5, soit 13,5 F.

b) En deux heures de promenade en montagne, j'ai parcouru 5,4 kilomètres.
Combien est-ce que je parcours en cinq heures ?

Le coefficient de proportionnalité faisant passer de la durée d'un parcours (T) à sa longueur (L) est la *vitesse moyenne* sur ce parcours. On a ici : L = 2,70 × T.
Donc en 5 heures, on parcourt 13,5 km (si on néglige la fatigue !).

c) J'ai placé 20 000 francs et ils ont rapporté 540 francs en un an.
Combien m'auraient rapporté 50 000 francs placés dans les mêmes conditions ?

Le coefficient de proportionnalité faisant passer de la somme placée (S) aux intérêts rapportés (R) est le *taux d'intérêt*.

On ici : R = $\frac{2{,}7}{100}$ S. Donc 50 000 F auraient rapporté 1 350 F.

5. 8 Quelques coefficients de proportionnalité

Les nombres mesurent des choses si différentes que les mêmes relations mathématiques peuvent porter des noms différents selon qu'on les applique à une carte de géographie ou à des marchandises en solde…

ÉCHELLE : L'échelle d'une carte est le coefficient de proportionnalité faisant passer des mesures sur le terrain aux mesures sur la carte.

EXEMPLE : **1 km**, échelle 1/25 000 → **4 cm**

TAUX : Le taux de schimiliblicité est le coefficient de proportionnalité faisant passer de l'effectif total d'une population à l'effectif schimiliblické.

EXEMPLE : **50 000 000**, Taux de mortalité : 0,05 → **750 000 morts**

VITESSE : La vitesse est le coefficient de proportionnalité faisant passer de la durée d'un parcours à la distance parcourue.

EXEMPLE : **40 secondes**, Vitesse : 10 m/s → **400 mètres**

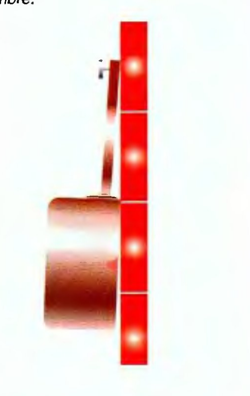
DÉBIT : Le débit d'un écoulement est le coefficient de proportionnalité faisant passer d'une certaine durée à la quantité écoulée.

EXEMPLE : **3 600 secondes**, Débit : 24 images/secondes → **86 400 images**

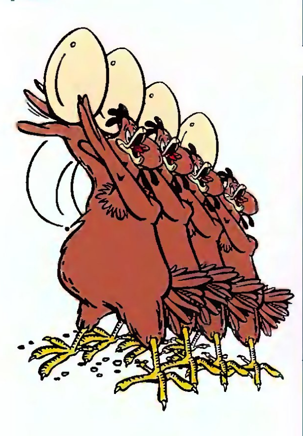
MASSE VOLUMIQUE : La masse volumique est le coefficient de proportionnalité faisant passer du volume d'un objet à sa masse.

EXEMPLE : **1 litre**, Masse volumique : 13,6 g/cm³ → **13,6 kilogrammes**

En mathématiques, on essaie de limiter au maximum ce qu'il faut savoir... et on aime bien de retrouver les choses à partir de ce que l'on sait. Ici on retrouve les propriétés de proportionnalité à partir des propriétés du nombre.



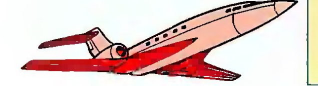
8 poules ont pondu 8 œufs en 8 jours.
Combien pondent 4 poules en 4 jours ?



De la suite de proportions

$$\frac{330}{1} = \frac{330 \times 3\,600}{3600} = \frac{1\,188\,000}{3\,600}$$

on déduit que : si la vitesse du son dans l'air est de 330 m/s, alors elle est aussi de 1188 km/h.



5. 9 Une satisfaction intellectuelle

La formule $y = ax$ et les propriétés très simples de la multiplication permettent de justifier les calculs de proportionnalité.
Voyons-en quelques exemples.

- $y = ax$ traduit le fait que y correspond à x dans une certaine relation de proportionnalité.
- Mais si $y = ax$, alors en multipliant chaque membre de l'égalité par 3, on a : $3y = 3ax$ que l'on peut écrire $(3y) = a \times (3x)$. Donc $3y$ correspond à $3x$.
- De même si $y_1 = ax_1$ et $y_2 = ax_2$, alors en ajoutant les égalités membre à membre, $y_1 + y_2 = ax_1 + ax_2$. Mais heureusement, la distributivité de la multiplication sur l'addition justifie l'écriture $ax_1 + ax_2 = a(x_1 + x_2)$.
Finalement :

$$y_1 + y_2 = a(x_1 + x_2)$$

et $y_1 + y_2$ correspond bien à $x_1 + x_2$.
Plus généralement, il est facile de montrer que

$$2y_1 + 3y_2 \text{ vaut } a(2x_1 + 3x_2).$$

C'est la propriété des combinaisons (5. 1).

- Et la règle magique du produit en croix ?
Écrivons $y_1 = ax_1$ et $y_2 = ax_2$ comme ceci : $\begin{cases} y_1 = ax_1 \\ ax_2 = y_2 \end{cases}$

Alors, en multipliant membre à membre : $a\,x_2\,y_1 = a\,x_1\,y_2$; il ne reste plus qu'à diviser par a : $x_2\,y_1 = x_1\,y_2$.
Et la règle est justifiée !

5. 10 Proportion

Une *proportion* est une égalité de deux quotients. Par exemple :

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}.$$

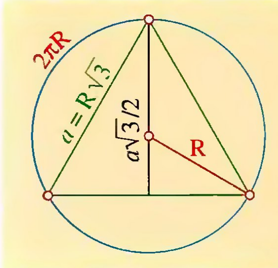
Imaginons les mesures $x_1, x_2, x_3,$... et y_1, y_2, y_3 de deux grandeurs liées par une relation de proportionnalité :

$\times a$					
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	...
y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	...

Alors on peut écrire $y_1 = ax_1$, $y_2 = ax_2$, $y_3 = ax_3$, etc.
Le coefficient de proportionnalité est donc égal à n'importe lequel des quotients de cette suite de proportions : $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3} = \ldots,$

Il existe un lien très étroit entre les proportions et les relations de proportionnalité, comme le suggère le vocabulaire.

Par exemple, si , $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$ c'est qu'une certaine relation de proportionnalité associe x_1 à y_1, x_2 à y_2.
Mais, d'après les propriétés des combinaisons, $x_1 + x_2$ est associé à $y_1 + y_2$, de même $2x_1 + 3x_2$ est associé à $2y_1 + 3y_2$. Le coefficient a qui vaut y_1/x_1 ou y_2/x_2 vaut donc aussi $\frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2}$, mais aussi $\frac{2y_1 + 3y_2}{2x_1 + 3x_2}$.



5. 11 Le coefficient le plus célèbre de la géométrie

La longueur d'un cercle est proportionnelle à son rayon. Et le coefficient de proportionnalité vaut 2π.

5. 12 Triangle équilatéral

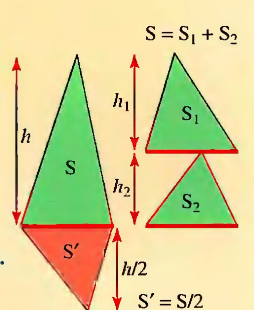
La hauteur d'un triangle équilatéral est proportionnelle à son côté : le coefficient de proportionnalité vaut $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (environ 0,87).

5. 13 Triangles de même base

L'aire d'un triangle de base constante est proportionnelle à sa hauteur. Le coefficient de proportionnalité vaut la moitié de la base :

$$S = \left(\frac{B}{2}\right) \times h.$$

Donc, si la hauteur est doublée, l'aire est doublée.
Si les hauteurs s'ajoutent, les aires s'ajoutent.



5. 14 Non-proportionnalité

L'aire d'un carré n'est pas proportionnelle à son côté.

En effet, l'aire ne double pas lorsque le côté est doublé, elle quadruple !



LES POURCENTAGES

Dans une certaine population, sur 2 000 personnes, 64 ont les yeux bleus.
En supposant que la proportion des yeux bleus est la même dans toute la population, combien de personnes auraient les yeux bleus sur 3 500 *?*
Le coefficient de proportionnalité faisant passer de la population (P) au nombre de gens ayant les yeux bleus (B) est le "pourcentage" de gens ayant les yeux bleus.
On écrit ce coefficient comme une fraction de dénominateur 100.
On a ici :

$$\frac{B}{P} = \frac{64}{2000} = \frac{3{,}2}{100}.$$

Sur 3 500 personnes, le nombre de personnes aux yeux bleus serait alors $\frac{3{,}2}{100} \times 3\,500$, soit 112.

5. 15 Pourcentage

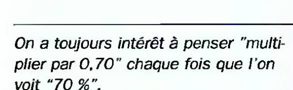
Un POURCENTAGE est toujours un coefficient de proportionnalité.
C'est ce qui explique que les pourcentages se traduisent par des multiplications (et n'ont rien à voir avec l'addition).

Dire ***p* % de X valent Y**, c'est dire $Y = \frac{p}{100} \times X$.

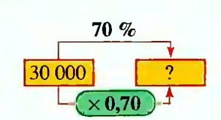
EXEMPLE

Dans une ville, sur 30 000 *électeurs, le taux de participation à une élection a été de* 70 %*. Combien d'électeurs ont participé au vote ?*

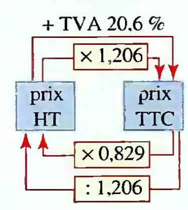
70 % de 30 000, c'est exactement $\frac{70}{100} \times 30\,000$, ou encore $0{,}70 \times 30\,000$, soit 21 000.



On a toujours intérêt à penser "multiplier par 0,70" chaque fois que l'on voit "70 %".



Le passage des prix "hors-taxe" au prix "TVA comprise" ne devient simple que si l'on a compris le schéma où 0,829 est l'inverse de 1,206.



Imaginons une quantité A (par exemple 250) ; on nous dit qu'elle augmente de p % (par exemple 5 %). Réfléchissons :

La quantité a augmenté de $A \times \frac{p}{100}$ (dans l'exemple 250 × 0,05, soit 12,5).
Elle devient donc $A + A \times \frac{p}{100}$;
c'est-à-dire

$$A\left(1 + \frac{p}{100}\right)$$ (dans l'exemple 250 × 1,05)

Elle a donc été multipliée par $1 + \frac{p}{100}$.

5. 16 Pourcentage d'augmentation

Si une quantité est augmentée de a %,
alors c'est qu'elle est multipliée par $\left(1 + \frac{a}{100}\right)$.

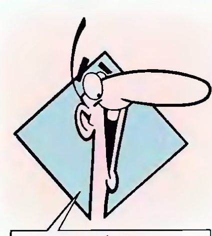
Par exemple, une augmentation de 15 % se traduit par une multiplication par 1,15.

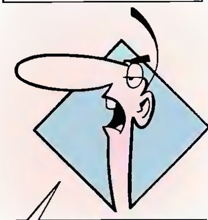
5. 17 Pourcentage de diminution

Si une quantité est diminuée de d %,
alors c'est qu'elle est multipliée par $\left(1 - \frac{d}{100}\right)$.

Par exemple, une diminution de 8 % se traduit par une multiplication par 0,92.

■ *Des hauts et des bas*



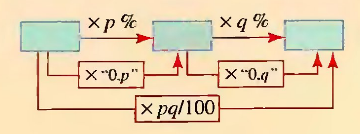


5. 18 Succession de pourcentages

"Prendre p %" c'est "multiplier par $\frac{p}{100}$".
"Prendre q %" c'est "multiplier par $\frac{q}{100}$".
"Prendre q % de p %" c'est "multiplier par $\frac{p}{100} \times \frac{q}{100}$",
c'est donc "prendre $\frac{pq}{100}$ %".

EXEMPLE
Une hausse de 10 % suivie d'une hausse de 20 % est-elle équivalente à une hausse de 30 % ?

Augmenter de 10 %, c'est multiplier par 1,10. Augmenter de 20 %, c'est multiplier par 1,20. Une hausse de 10 % suivie d'une hausse de 20 % revient donc à multiplier par 1,10 × 1,20, soit 1,32.
La hausse totale est donc de 32 %.



Finalement, il n'y a qu'un seul truc à retenir : prendre un pourcentage, c'est multiplier par un nombre (et surtout pas ajouter).

LE JEU DE L'OIE DES POURCENTAGES

Il est possible que certaines de ces pratiques commerciales soient contraire à la Loi, mais c'est une autre histoire.

Vous reconnaîtrez, au moins, que toutes respectent les lois des proportions. Des lois qu'il vaudrait mieux que nul client n'ignore !

■ *Testez-vous, en huit cases et six questions !*

Cases 1, 2 et 3

Si on veut payer le moins cher possible, vaut-il mieux aller à la boulangerie André ou à la boulangerie Julien ?

Case 4

Quel était le prix avant réduction ?

Case 5

Les vendredis 13, quelle est la remise ?

Case 6

D'un lundi à l'autre, les prix augmentent-ils ou diminuent-ils ?

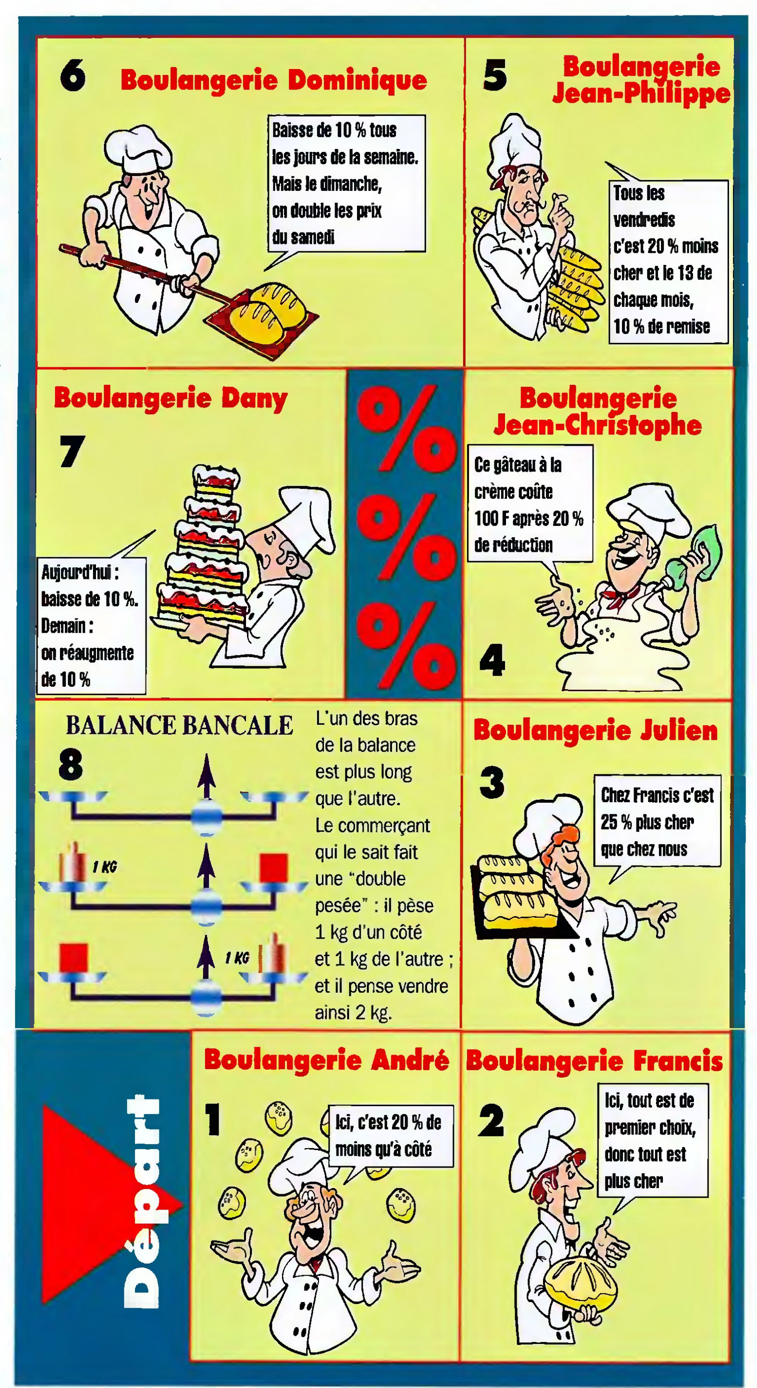
Case 7

Après-demain, paiera-t-on le même prix qu'hier ?

Case 8

Les deux pesées donnent-elles bien 2 kg de marchandise ? Le marchand y gagne-t-il ou y perd-il ?

Vous respirez un bon coup, vous lisez la première question, et vous partez à la boulangerie.



DE LA FABLE AU DIAGRAMME DES ESPACES

Peut-être que La Fontaine ne reconnaîtrait pas sa fable dans ce graphique. Et pourtant, il ne fait que traduire, à sa manière, « Le Lièvre et la Tortue ».

L'histoire de la tortue

D'après le graphique, la tortue part immédiatemment, court toujours à une vitesse régulière, et parcourt la distance totale en un certain temps. À la moitié de ce temps, elle est à la moitié du trajet et au trois quarts du temps, elle est aux trois quarts du trajet. Sa vitesse étant constante, la distance parcourue est proportionnelle au temps passé. Sa course peut se résumer par la formule :

$$d = v \cdot t$$

La vitesse v est le coefficient de proportionnalité entre le temps t et la distance d.

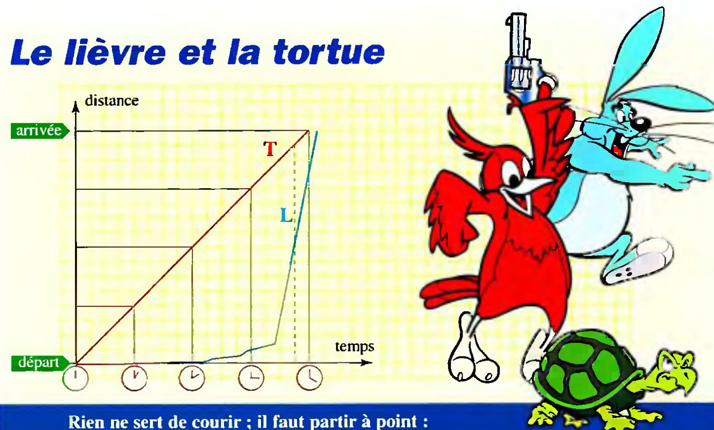
Cette formule se traduit graphiquement par une droite (voir ci-contre en haut).

L'histoire du lièvre

Pour le lièvre, c'est tout autre chose : il commence par se reposer. Le temps passe et la distance parcourue reste presque nulle. Puis il fait quelques pas, s'arrête et flâne ainsi plusieurs fois.
Aux trois quarts du temps il n'a encore parcouru qu'un dixième de la distance ; et tout à la fin, il fonce à toute vitesse (en peu de temps, il parcourt beaucoup de distance).
Malheureusement pour lui, au moment où la tortue arrive, le lièvre n'a pas parcouru toute la distance !

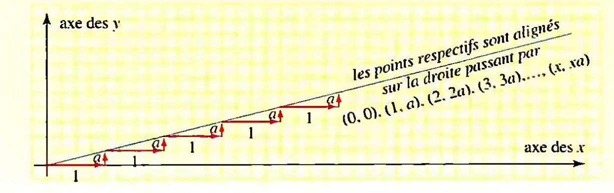
Toute situation de proportionnalité peut se représenter graphiquement par une droite. En effet si $y = ax$ alors *chaque fois que x augmente de 1, y augmente de a.*

Le lièvre et la tortue



**Rien ne sert de courir ; il faut partir à point :
Le Lièvre et la Tortue en sont un témoignage.
« Gageons, dit celle-ci, que vous n'atteindrez point
Sitôt que moi ce but. — Sitôt ? Êtes-vous sage ?
Repartit l'animal léger :
Ma commère, il faut vous purger
Avec quatre grains d'ellébore.
— Sage ou non, je parie encore. »
Ainsi fut fait ; et de tous deux
On mit près du but les enjeux :
Savoir quoi, ce n'est pas l'affaire,
Ni de quel juge l'on convint.
Notre Lièvre n'avait que quatre pas à faire,
J'entends de ceux qu'il fait lorsque, prêt d'être atteint,
Il s'éloigne des chiens, les renvoie aux calendes ;
Et leur fait arpenter les landes.
Ayant, dis-je, du temps de reste pour brouter,
Pour dormir et pour écouter
D'où vient le vent, il laisse la Tortue
Aller son train de sénateur,
Elle part, elle s'évertue,
Elle se hâte avec lenteur,
Lui cependant méprise une telle victoire,
Tient la gageure à peu de gloire,
Croit qu'il y va de son honneur
De partir tard. Il broute, il se repose,
Il s'amuse à toute autre chose
Qu'à la gageure. À la fin, quand il vit
Que l'autre touchait presque au bout de la carrière,
Il partit comme un trait ; mais les élans qu'il fit
Furent vains : la Tortue arriva la première.
« Eh bien ! lui cria-t-elle, avais-je pas raison ?
De quoi vous sert votre vitesse ?
Moi l'emporter ! et que serait-ce
Si vous portiez une maison ?**

Jean de La Fontaine, *Fables*



THÈME 6

De l'ordre avant toutes choses

Dans les différents ensembles de nombres, il y a d'abord, évidemment, les nombres eux-mêmes et toute leur diversité ; et il y a les opérations qui combinent ces nombres. Mais il y aussi moyen de comparer les nombres les uns les autres. L'étude de l'ordre existant entre les nombres et de ses liens avec les différentes opérations réservent quelques pièges…

Ordre et approximation

Ordre, du latin *ordo*, ordre des fils dans la trame d'un tissage, de la même famille que ***ourdir*** du latin *ordiri* : commencer à tisser.
À partir de la trame des nombres entiers, tous les nombres réels se rangent dans un bon ordre, des plus "petits" négatifs jusqu'aux plus "grands" positifs.

Comparer des nombres

Les nombres mènent une vie bien rangée et il règne chez eux un ordre total. Mais pour savoir où l'on en est, il faut savoir comparer et ranger les nombres, quelle que soit leur écriture.

Approximations, encadrements

Le mathématicien aime les valeurs exactes mais il accepte, quand c'est nécessaire, de recourir au calcul approché. Il essaie alors autant que possible de préciser le degré d'approximation de ses réponses : c'est le règne de l'à-peu-près maîtrisé.

Inéquations

Les principes de l'égalité n'ont plus de secret pour vous et vous êtes maître en résolution d'équations. Un peu plus délicates à traiter, bien qu'assez proches, sont les inéquations et leur cortège de solutions…

Une précision diabolique

UNE ROUE DE VOITURE a 60 cm de diamètre. Combien fait-elle de tours sur la route Paris-Toulouse (720 km) ?



Un calcul à la calculatrice donne $720\ 000 \div (\pi \times 0.6) = 381\ 971.863\ 4$.
Mais est-ce vraiment un résultat raisonnable ?
Que représentent les 4 décimales : 8634 ?
Est-on vraiment sûr que le nombre de tours n'est pas inférieur à 381 900 ?
D'abord la distance parcourue x n'est évidemment pas exactement 720 km. Certainement, elle est comprise entre 715 et 725 km.
Compte-tenu de cette imprécision (et de celle portant sur le diamètre d de la roue, sûrement pas précise au millimètre près), la valeur de π prise pour les calculs n'est-elle pas un peu irréaliste : avec 3,14 à la place de π, le calcul donne 382 166 ; et avec 3,1416, il donne 381 971.

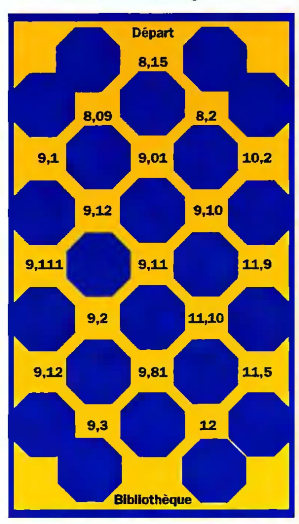
Lorsque vous annoncez le résultat d'un calcul, ne donnez pas plus de "chiffres significatifs" que ne le permet la précision des données qui ont amené ce calcul.

Ici il est raisonnable d'annoncer 380 000 tours de roues à quelques milliers près.
Pour "démontrer" ce résultat, on peut supposer que

$$715\ 000 < x < 725\ 000 \text{ et } 0{,}59 < d < 61$$

et encadrer le résultat du calcul $x \div (\pi d)$.

Le chemin de la bibliothèque
Peut-on atteindre la bibliothèque en passant par des cases où figurent des nombres de plus en plus grands ?



Combien y a-t-il de chemins ? Peut-on tourner en rond ?

COMPARER DES NOMBRES

6. 1 Les symboles <, ⩽, >, ⩾

Le signe < remplace le lien verbal "est inférieur à".
Et le signe > remplace "est supérieur à".
Le signe ⩽ se lit "est inférieur ou égal à".

Ce dernier symbole ne prend vraiment un sens que lorsqu'on écrit des inégalités comportant des lettres.

L'inégalité $x \leqslant 3$ diffère de l'inégalité $x < 3$ car la première est vraie si x vaut exactement 3 et la seconde non.

6. 2 Comparer des décimaux positifs

Pour comparer des décimaux positifs, il y a deux méthodes :

— comparer "chiffre à chiffre" :

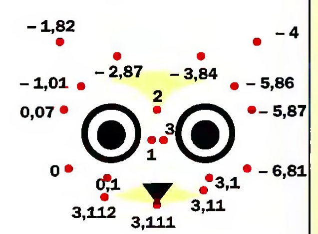
10,812 < 10,83 car le premier chiffre par lequel ils diffèrent est le chiffre des centièmes et 1 < 3.

— les écrire avec le même nombre de décimales :

10,812 < 10,83 car 10,83 = 10,830 et 812 < 830.

UN CONSEIL : Lorsque vous voulez comparer deux nombres décimaux, écrivez le même nombre de chiffres après la virgule. Cela vous évitera des erreurs "idiotes".

Relier les points dans l'ordre croissant... et vous verrez une drôle de bête...

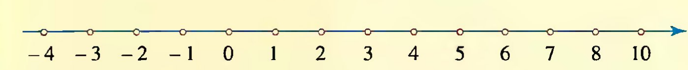


6. 3 Comparaison des décimaux relatifs

Pour comparer les décimaux de tous types, il faut savoir de plus que :

— 0 est le plus petit des positifs et le plus grand des négatifs.
— tout nombre strictement positif est plus grand que tout nombre strictement négatif.
— les nombres négatifs sont rangés dans l'ordre inverse de leurs opposés.

$-2 > -3$ car $2 < 3$.



L'ordre des nombres se "voit" très bien sur une droite graduée.

6. 4 Comparaison des nombres en écriture fractionnaire

Si deux fractions ont le même dénominateur, elles sont dans le même ordre que leurs numérateurs.

Pour comparer deux fractions, on utilise donc souvent la mise au même dénominateur.

$\frac{13}{7} < \frac{5}{2}$ car $\frac{13}{7} = \frac{26}{14}$ et $\frac{5}{2} = \frac{35}{14}$, or $26 < 35$.

On peut aussi avoir recours à l'écriture décimale de la fraction et effectuer la comparaison sur les écritures décimales.

Mise en sac
Un sac vide pèse entre 800 g et 850 g. On y met entre 4,2 kg et 4,5 kg de provisions.
▮ ***Combien peut peser le sac plein ?***

Le poids des mots
Un cartable pèse entre 3,5 kg et 3,7 kg. On en retire un dictionnaire de 1 kg à 100 g près.



▮ ***Combien peut peser le cartable ?***

6. 5 Ordre et addition

Une inégalité vraie reste vraie si on ajoute un même nombre aux deux membres.

Si a, b et c sont trois nombres, alors :

si $a < b$ alors $a + c < b + c$.

Si on ajoute membre à membre deux inégalités vraies, l'inégalité obtenue est vraie.

Si a, b, c et d sont quatre nombres, alors :

si $a < b$ et $c < d$ alors $a + c < b + d$.

Les résultats précédents restent vrais si on remplace partout $<$ par $\leqslant$.

6. 6 Ordre et opposé

Deux nombres sont rangés dans l'ordre inverse de leurs opposés.

Si a, b sont deux nombres, alors :

si $a < b$ alors $-a > -b$.

6. 7 Ordre et soustraction

Une inégalité vraie reste vraie si on soustrait un même nombre aux deux membres.

Si a, b et c sont trois nombres, alors :

si $a < b$ alors $a - c < b - c$.

Attention, on n'obtient généralement pas une inégalité vraie en soustrayant membre à membre deux inégalités.

Ordre et soustraction
a, b, c, d sont quatre nombres tels que $a < b$ et $c < d$.
▮ ***Est-il possible de dire si $a - c$ est plus petit ou plus grand que $b - d$?***
▮ ***Est-il possible de dire si $a - d$ est plus petit ou plus grand que $b - c$?***

En vélo
Sur un trajet de 60 km, André Zienne fait en moyenne 15 à 20 km/h.
▮ ***Combien de temps peut-il mettre ?***

Encaissements
Dans une bibliothèque, il y a entre 20 000 et 30 000 livres. Une caisse contient de 30 à 40 livres.
▮ ***De combien de caisses peut-on avoir besoin ?***

6. 8 Ordre et multiplication

Une inégalité vraie reste vraie si on multiplie les deux membres par un même nombre positif. Elle devient fausse si on les multiplie par un même nombre négatif.

Si a, b sont deux nombres, alors :

si $a < b$ alors $7a < 7b$.

Si a, b sont deux nombres, alors :

si $a < b$ alors $-2a > -2b$.

6. 9 Ordre et multiplication membre à membre

Si on multiplie membre à membre deux inégalités vraies ne contenant que des nombres positifs, l'inégalité obtenue est vraie.

Si a, b, c et d sont quatre nombres, alors :

si $0 < a < b$ et $0 < c < d$ alors $0 < ac < bd$.

6. 10 Ordre et inverse

Deux nombres positifs sont rangés dans l'ordre inverse de leurs inverses.

Si a, b sont deux nombres, alors :

si $0 < a < b$ alors $\frac{1}{a} > \frac{1}{b} > 0$.

Pour les inverses des nombres négatifs, sous l'effet d'un double retournement de sens, on revient à l'ordre de départ. Autrement dit, deux nombres négatifs sont dans le même ordre que leurs inverses.

Quotidien
Un quotidien tire chaque jour de l'année, à 200 000 exemplaires, 44 pages de format 36 cm sur 28 cm. En 40 ans de parution, la surface de papier ainsi produite couvrira-t-elle environ la superficie de :
- ***la ville de Paris ?***
- ***le département de l'Aude ?***
- ***la France toute entière ?***



Précision
Un nombre et sa troncature à 10^{-n} près ne diffèrent jamais de plus de 10^{-n}.
Un nombre et son arrondi à 10^{-n} près ne diffèrent jamais de plus de $0{,}5 \times 10^{-n}$.

Arrondi de troncature
La troncature au dixième de l'arrondi au centième de ma taille en mètres vaut 1,60 m.
- ***Combien puis-je mesurer ?***



APPROXIMATIONS, ENCADREMENTS

6. 11 Ordre de grandeur d'un résultat

Soyez un calculateur réfléchi.

Avant un calcul, prévoyez "en gros" le résultat du calcul. C'est ce qu'on appelle faire un calcul d'ordre de grandeur. En particulier, si vous calculez à la calculatrice, une erreur de frappe est toujours possible et c'est un moyen de les déceler.

EXEMPLE
Pour calculer $523{,}78 \times 2356{,}7$, à la main ou à la machine, on se dit :
$500 \times 2\,000 = 1\,000\,000$. Le résultat doit être voisin du million et un peu plus grand.

Après un calcul, regardez le résultat d'un air critique : est-il vraisemblable ?

EXEMPLE
Si votre coureur court à la vitesse de 200 km/h, il est plus plausible que votre calcul soit faux que vous soyez tombé sur Superman. Si l'âge du capitaine est 215 ans, il y a sans doute un problème quelque part.

Essayez de prévoir le signe d'un produit avant de le calculer.
Si un carré est trouvé négatif, méfiez-vous.
Si une longueur ou une aire est trouvée négative, il est impératif de refaire le calcul.

6. 12 Troncature et arrondi

Pour travailler sur des nombres non décimaux, comme π ou $\frac{1}{3}$ ou sur des décimaux ayant beaucoup de décimales, on est obligé de négliger les décimales à partir d'un certain rang.

On peut alors **tronquer** le nombre (on coupe sans remords son écriture) ou l'**arrondir** (on coupe son écriture en s'intéressant à la décimale suivante ; si cette décimale vaut 5 ou plus, on augmente de 1 le dernier chiffre écrit).

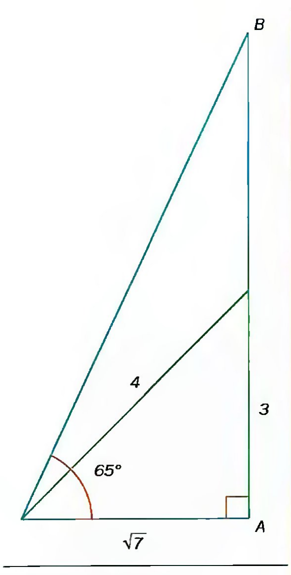
EXEMPLES
La troncature à 10^{-2} près (à 0,01 près) de $\frac{1}{3}$ est 0,33 (on coupe après le chiffre des centièmes).

L'arrondi à 10^{-2} près (à 0,01 près) de $\frac{1}{3}$ est 0,33 (on coupe après le chiffre des centièmes et on regarde le chiffre des millièmes, c'est un 3. On laisse comme çà. On a arrondi **par défaut**).

La troncature à 10^{-2} près de $\frac{1}{6}$ est 0,66.

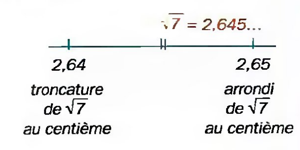
L'arrondi à 10^{-2} près de $\frac{1}{6}$ est 0,67 (le chiffre des millièmes est un 6, c'est plus grand que 5, on a arrondi **par excès**).

Un truc de calculatrice : il y a des machines qui ont une touche notée **INT** : elle provoque la troncature à l'unité près du nombre affiché. Autrement dit elle ne garde que la "partie entière" d'un nombre.



Propagation des erreurs

Attention, on perd de la précision dans la multiplication. L'encadrement de AB a une amplitude de 6 millièmes alors que les encadrements de départ pour $\sqrt{7}$ et pour tan 65° étaient au millième près.



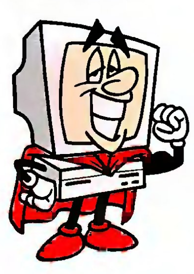
Testez votre calculatrice ou votre ordinateur

Frappez 1 : 3 × 3 .

Si votre calculatrice affiche

0,9999999999 ,

c'est un peu ennuyeux !



6. 13 Approximations décimales par excès ou par défaut

Tout nombre peut être encadré entre deux décimaux "distants" de 1, de 10^{-1}, de 10^{-2}, de 10^{-3}, ...

EXEMPLES

$3 < \pi < 4$

$3{,}1 < \pi < 3{,}2$

$3{,}14 < \pi < 3{,}15$.

Les valeurs plus petites (celles de gauche) sont dites **approximations décimales par défaut** ; pour un nombre positif elles coïncident avec la troncature. Les valeurs plus grandes sont dites **approximations décimales par excès.**

6. 14 Calculs sur des encadrements

On est souvent amené à calculer non pas avec un nombre mais avec des encadrements de ce nombre.

Un encadrement est toujours plus précis qu'une approximation.

EXEMPLE

Dans un calcul de longueur utilisant la trigonométrie, on a trouvé

$AB = \sqrt{7} \times \tan 65°$.

On sait que $2{,}645 < \sqrt{7} < 2{,}646$ et que $2{,}144 < \tan 65° < 2{,}145$.

Les propriétés concernant l'ordre et la multiplication permettent de dire que

$5{,}67088 < AB < 5{,}67567$,

ce qui permet d'affirmer que

$5{,}670 < AB < 5{,}676$.

6. 15 Calcul approché à la calculatrice

En pratique, on ne calcule pas souvent sur des encadrements, mais on utilise un arrondi (c'est exactement la borne de l'encadrement la plus proche du nombre).

Ainsi, on dira $\sqrt{7} \approx 2{,}65$ et $\tan 65° \approx 2{,}14$ d'où $AB \approx 5{,}6710$ ou $AB \approx 5{,}7$.

C'est ce qui se passe notamment quand on confie le calcul à une calculatrice. Elle calcule sur des arrondis, avec un certain nombre de décimales (variable suivant les machines mais supérieur au nombre de chiffres affichés) puis arrondit à la précision d'affichage demandée.

Quand on a effectué un calcul approché à la calculatrice, il faut toujours réfléchir à la précision avec laquelle on va donner la réponse.

Lorsqu'on lit des données ou des résultats, il est raisonnable de penser qu'ils sont encadrés par des nombres différents d'une unité du dernier chiffre significatif donné.

6. 16 Le symbole ≈

Attention le symbole ≈ n'est pas vraiment un signe mathématique car, après une opération, on ne sait plus avec exactitude la qualité de l'approximation. Il ne faut pas croire que ce symbole a les mêmes propriétés que le signe =.

EXEMPLE

Il est raisonnable d'écrire $\pi \approx 3{,}14$, mais aussi $\pi \approx 3{,}1416$, et donc $3{,}1416 \approx 3{,}14$.

Si le signe "≈" avait les mêmes propriétés que le signe "=", on pourrait multiplier chaque membre par 10 000 et écrire $31\,416 \approx 31\,400$; c'est encore raisonnable ; mais si on se permet de soustraire 31 400 à chaque membre, on aboutit à une absurdité : $16 \approx 0$!!!

Alors... prudence !

Un exercice très difficile

■ ***Quels sont tous les nombres x positifs tels que*** $1 \leqslant \frac{x+1}{x-1} \leqslant 2$?

■ INÉQUATIONS

Une inégalité qui comporte des nombres inconnus désignés par des lettres (souvent x et y) est une inéquation. Résoudre une inéquation, c'est trouver par quels nombres on peut remplacer la (les) lettre(s) pour obtenir une inégalité vraie. Une inéquation a en général beaucoup de solutions. Au collège, on s'intéresse aux inéquations du premier degré à une ou deux inconnues.

6. 17 Technique de résolution : inéquation à 1 inconnue

La technique ne diffère de celle des résolutions d'équations que sur un point : il faut retourner le sens de l'inégalité si l'on multiplie ou l'on divise les deux membres par un même nombre négatif.

EXEMPLE

$2x + 5 < 5x - 10$

$-3x < -15$

$x > \frac{-15}{-3}$

(on change le sens de l'inégalité en divisant par (– 3) qui est négatif)

$x > 5$.

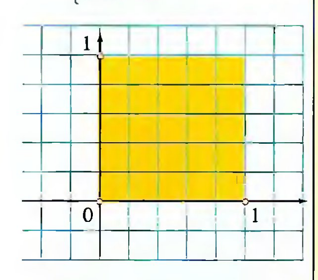
Tous les nombres supérieurs à 5 sont solutions de l'inéquation.

solutions

– 4 – 3 – 2 – 1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

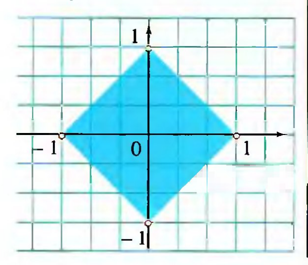
Le carré représenté est solution du système d'inéquations :

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 \leqslant y \leqslant 1 \end{cases}$$



Le carré bleu est solution du système d'inéquations :

$$\begin{cases} -1 \leqslant x + y \leqslant 1 \\ -1 \leqslant x - y \leqslant 1 \end{cases}$$



6. 18 Technique de résolution : inéquation à 2 inconnues

Une inéquation du type $ax + by > c$ a beaucoup de solutions. En effet, l'équation $ax + by = c$ a déjà une infinité de solutions. Toutes les solutions sont les coordonnées de points de la droite d'équation $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$ (si $b \neq 0$) (*voir thème* 4 : *Équations*).

Les solutions de l'inéquation seront les coordonnées de tous les points situés dans le même demi-plan ayant pour frontière cette droite.

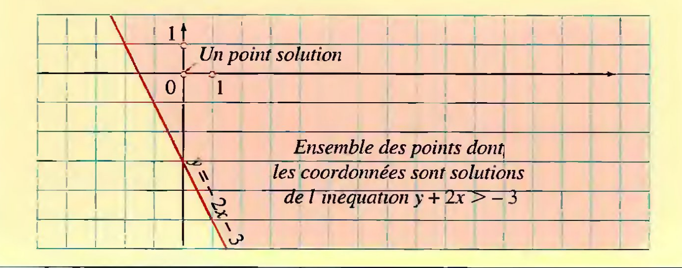
EXEMPLE

Soit l'inéquation $2x + y > -3$.

On en trace la droite d'équation $y = -2x - 3$.

On choisit un point de coordonnées simples, par exemple l'origine (0, 0) et on regarde si ce couple (0, 0) est solution de l'inéquation. C'est le cas puisque $0 > -3$.

C'est donc le demi-plan contenant l'origine qui contient toutes les autres solutions de cette inéquation.



JULES CÉSAR, GRÉGOIRE XIII ET L'APPROXIMATION

Le climat est bien capricieux dans notre Europe tempérée ; parfois il fait très beau au mois de mars mais il arrive qu'il gèle au mois de mai. Et pourtant, dès que les hommes ont vécu de l'agriculture, ils ont dû semer et planter à des moments très précis, en prenant toujours quelques risques. La connaissance exacte de la durée de l'année est alors très précieuse pour éviter de gâcher trop souvent les semailles.



Projet de réforme

Connaissant la valeur de l'année donnée ci-contre à un quart de seconde près, dans combien de temps le calendrier grégorien sera-t-il décalé d'un jour ?

Proposer une réforme du calendrier assurant un décalage minimum compte-tenu de nos connaissances astronomiques.

Histoires de calendrier

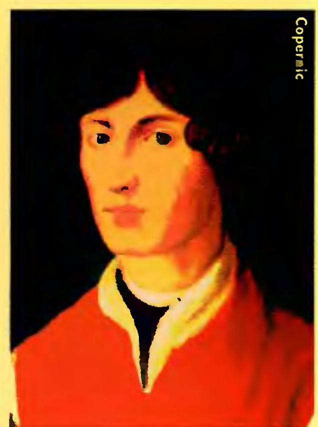
Pour tourner autour du Soleil, la Terre met exactement

1 an = 365 jours 5 heures 48 minutes 46 secondes
(à 0,025 seconde près par excès).

Donc :

1 an = 365,2422 jours

Avant Jules César, l'année romaine durait 360 jours plus quelques jours ajoutés selon le bon vouloir des "Pontifes", de sorte que l'année 45 avant J.C., le mois de mars se retrouva en plein hiver.
Jules César décida que l'année suivante durerait 445 jours et mit en place le calendrier Julien :
6 jours exactement étaient comptés en plus des 359 jours normaux (le 360ème, pour le jour de l'an, le 361ème, le 362ème, le 363ème, le 364ème et le 365ème), et, tous les quatre ans, on rajoutait un deuxième sixième jour ("bissextile").
Depuis ce moment là, en moyenne, l'année "civile" dure 365,25 jours.
Mais attention 365,25 – 365,2422 cela fait 0,0078 jours de trop par an.
Cela ne fait pas beaucoup bien sûr, mais suffisamment pour que tous les millénaires, un décalage de plus d'une semaine (7,8 jours) soit créé.
C'est vers la fin du XVIe siècle, celui du grand astronome Copernic, que l'on a voulu corriger cette anomalie.



Le pape Grégoire XIII décida donc que le lendemain du 4 octobre 1582 serait le 15 octobre !
Et que, à partir de ce moment, dans le calendrier grégorien, 3 années bissextiles sur 400 seraient supprimées : les années multiples de 400 sont bissextiles (comme 1600 et 2000), mais les autres centaines ne le sont pas (comme 1700, 1800, 1900, 2100,...).

En 400 ans, cela ramène le décalage à $400 \times 0{,}0078 - 3$, soit 0,12 jours

Cela ne tombe pas encore juste ; dans 10 fois cette période, c'est-à-dire dans 4000 ans, il faudra supprimer un 29 février !
Il restera alors encore un décalage de 0,02 jour en 4000 ans.

Notre calendrier est "solaire", c'est-à-dire fondé sur le mouvement de la Terre autour du Soleil.
Le calendrier musulman, par contre, est lunaire, c'est-à-dire fondé sur le mouvement de la Lune autour de la Terre : les années du calendrier musulman ont 354 jours. C'est pourquoi le "ramadan" se décale régulièrement de 11 à 12 jours par an, par rapport à notre calendrier.
Quant au calendrier juif, c'est une combinaison "lunaire" et "solaire" fondée sur le cycle dit de "Méton" (443 av. J.-C.) qui vaut 19 ans ou 235 lunaisons...

Test 6

Pour chacune des 10 questions, indiquer la ou les bonnes réponses parmi A, B, C, D ou E

	Questions	A	B	C	D	E
1	Parmi les cinq nombres -7, -6, -14, 0, -4, …	le premier est supérieur au dernier	le dernier est supérieur aux autres	le premier est supérieur aux autres	tous sont supérieurs au troisième	tous sont inférieurs au quatrième
2	Où y a-t-il une inégalité vraie ?	$-2 < 1$	$2 < -1$	$0 > -1$	$0 > 0{,}1$	$-2 \leqslant -2$
3	Quels sont les nombres plus grand que 1 ?	$\frac{25}{30}$	-10	$3{,}01$	10^{-3}	10^{3}
4	Quels sont les nombres plus grand que -1 ?	10^{-2}	$\frac{3}{10}$	-5	$-\frac{7}{4}$	$-1{,}01$
5	Si on sait que $x \geqslant 10$, on est sûr que :	$x > 2$	$x = 10$	$x > 11$	$x > 10$	$x = 11$
6	Quels nombres sont solutions de : $3x - 2 > x + 4$?	-1	0	3	5	$\frac{10}{3}$
7	Entre -4 et -2, il y a exactement…	1 entier	7 entiers	9 entiers	8 entiers	6 entiers
8	Pour le quotient de 20 par 3, le nombre 6,66 est…	la troncature au dixième	l'arrondi au centième près	un arrondi par défaut	un arrondi par excès	la troncature au centième
9	Si a est négatif, alors…	$a \leqslant -a$	$a \geqslant -a$	$-a$ est négatif	$-a$ est positif	$-(-a)$ est négatif
10	En quatre jours, il y a environ…	500 heures	6 000 minutes	34 000 s	340 000 s	100 heures

THÈME 7

Les fonctions de la fonction

L'économiste fait des tableaux, le biologiste fait des graphiques, le physicien exprime des lois : dans toutes les sciences, on étudie des relations de dépendance entre des grandeurs variables. Les mathématiques apportent un même langage et ces outils de compréhension et de décision : la notion de fonction, mise au point par Leonhard Euler au grand siècle des Encyclopédistes.

Fonctions numériques

Fonction, de la racine latine *fungi, functus*, signifiant ***"avoir fait"***. C'est au XVIIIe siècle, avec Leibniz puis Euler que le mot prit petit à petit un sens mathématique précis.

Le vocabulaire des fonctions

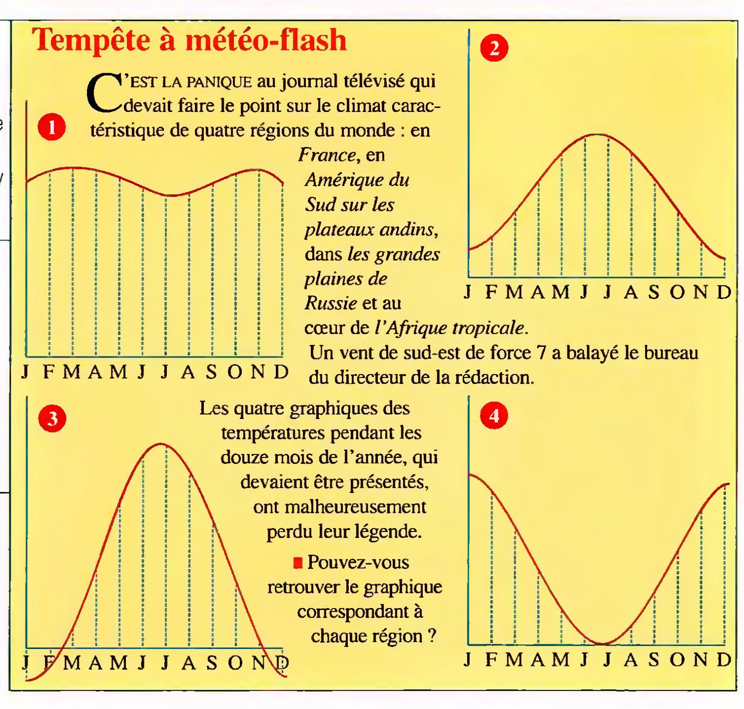
Le mathématicien adore avoir des relations et étudier les liaisons ainsi créées. Parmi elles, les *fonctions* ne sont pas des liaisons très dangereuses, puisque chaque nombre n'y est lié qu'à un seul autre nombre.

Dessiner des fonctions

Pour voir une fonction dans son ensemble, une *représentation graphique* a une supériorité évidente. Elle résume et complète un tableau de valeurs. Mais il faut apprendre à tirer d'une représentation graphique les informations qu'elle contient.

Les fonctions linéaires et affines

La proportionnalité est bien connue de vous ? Alors vous la reconnaîtrez sous le nom de "fonction linéaire". Quant aux fonctions affines, elles décrivent une variante un peu décalée de proportionnalité.



Tempête à météo-flash

C'est la panique au journal télévisé qui devait faire le point sur le climat caractéristique de quatre régions du monde : en *France*, en *Amérique du Sud sur les plateaux andins*, dans *les grandes plaines de Russie* et au cœur de *l'Afrique tropicale*.

Un vent de sud-est de force 7 a balayé le bureau du directeur de la rédaction.

Les quatre graphiques des températures pendant les douze mois de l'année, qui devaient être présentés, ont malheureusement perdu leur légende.

- Pouvez-vous retrouver le graphique correspondant à chaque région ?

Fonctions ou simples relations ?
a) L'aire d'un cercle est-elle une fonction de son périmètre ?
b) La somme de deux nombres est-elle une fonction du plus grand de ces nombres ?
c) Le produit de deux entiers successifs est-il une fonction du plus petit de ces nombres ?
d) le produit de deux nombres est-il une fonction de leur moyenne arithmétique ?
e) Le numéro de code postal d'une commune est-il une fonction du numéro du département ?
f) Le numéro du département d'une commune est-il une fonction du code postal de la commune ?

LE VOCABULAIRE DES FONCTIONS

7. 1 Qu'est-ce qu'une fonction ?

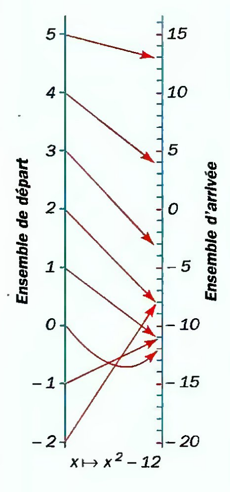
Pour définir une fonction, il faut donner trois choses :
— un ensemble de départ
— un ensemble d'arrivée
— un moyen de faire correspondre à certains éléments de l'ensemble de départ un unique élément de l'ensemble d'arrivée.

Au collège, on s'intéresse aux fonctions où les ensembles de départ et d'arrivée sont composés de nombres (des fonctions "numériques"). Si on ne précise pas, l'ensemble de départ sera celui de "tous les nombres" (les réels).
Il y a d'autres fonctions en mathématiques, en particulier en géométrie.
Les fonctions qui à des points font correspondre des points s'appellent des **transformations**.

La correspondance peut être décrite de différentes manières :
— Par une situation.
EXEMPLE : la fonction qui à l'âge du petit Pierre fait correspondre son poids.
— Par un tableau de nombres. Cela se produit souvent en statistiques (voir thème 8).
— Ce peut être une touche de calculatrice.
— Ce peut être la description d'un calcul. On verra alors écrit :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x^2 - 12$$

on lit : "la fonction f est celle qui à tout nombre x associe le nombre $x^2 - 12$".



7. 2 Image d'un nombre

L'image du nombre x est le nombre qui lui correspond.
L'écriture $f(x)$ est bien commode pour désigner l'image de x.

EXEMPLE
L'image de 3 par la fonction $f : x \mapsto x^2 - 12$ s'écrit $f(3)$.
Il suffit, pour calculer l'image de 3, de substituer 3 à x dans l'égalité $f(x) = x^2 - 12$:
$f(3) = 3^2 - 12 = -3$.

Pour certaines fonctions, il peut exister des nombres n'ayant pas d'image. Par contre, aucun nombre ne peut avoir plusieurs images.

Par exemple, pour la fonction racine carrée, les nombres négatifs n'ont pas d'image, mais aucun nombre ne possède deux racines carrées.

7. 3 Antécédent d'un nombre

Si pour une fonction f, un nombre x a pour image un nombre y, on dira aussi que y a pour antécédent x.

Départ		Arrivée
x	$\longmapsto$	y
x a pour image y		y a pour antécédent x

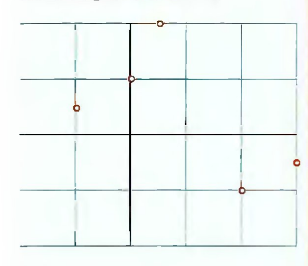
EXEMPLE
f est la fonction définie ci-dessus. Chercher l'antécédent de 13, c'est chercher x tel que $x^2 - 12 = 13$. Cela revient à résoudre une équation. Ici 13 a deux antécédents : 5 et – 5. Le nombre – 12 à un seul antécédent : 0. Et le nombre – 20 n'a aucun antécédent.

Prudence, on joint

Soit g une fonction telle que

g(– 1) = 0,5
g(0) = 1
g(0,5) = 2
g(2) = – 1
g(3) = – 0,5.

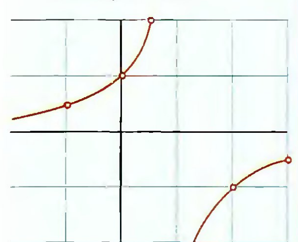
Les renseignements donnés :



ce qu'il ne faudrait pas faire :



car la représentation graphique ressemblerait plutôt à ceci :



s'il s'agissait de la fonction

$x \mapsto \frac{1}{1-x}$!

DESSINER DES FONCTIONS

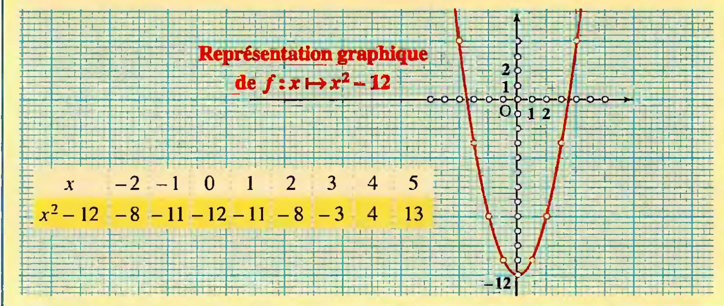
7. 4 Du tableau au graphique

Soit une fonction numérique décrite par une formule $f(x) = \ldots$
Pour étudier cette fonction, on peut dresser un tableau :

x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	…
$f(x)$	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	…

On peut alors utiliser l'idée suivante : dans le plan muni d'un repère, on place tous les points de coordonnées $(x\,;f(x))$.

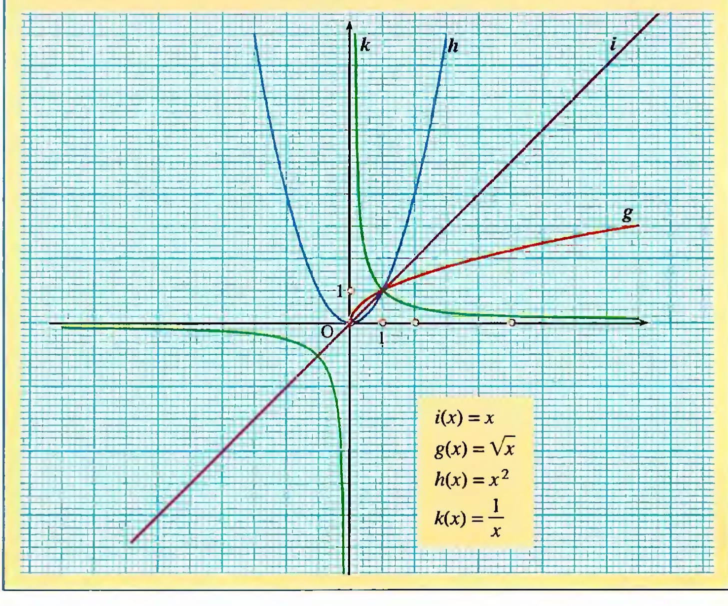
Supériorité du graphique par rapport au tableau : on ne peut calculer dans le tableau qu'un nombre fini d'images, tandis qu'on peut facilement dessiner une infinité de points : si la fonction n'est pas trop saugrenue et si on la connaît bien, on peut arriver à tracer une ligne qui ne soit pas trop éloignée d'une représentation graphique exacte.



x	–2	–1	0	1	2	3	4	5
x^2-12	–8	–11	–12	–11	–8	–3	4	13

7. 5 Des représentations graphiques

Voici quelques représentations graphiques de fonctions usuelles.



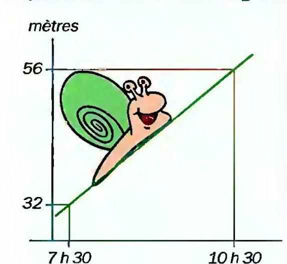
Si d représente la distance parcourue pendant le temps t à une vitesse constante v, on a la relation :

d = v t.

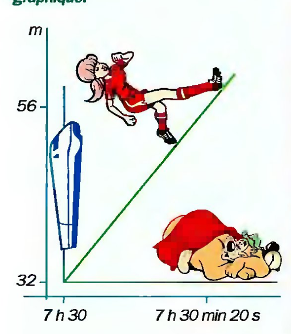
On peut alors dire dans cette situation :

- *la distance parcourue est une fonction linéaire du temps de parcours : en deux fois plus de temps, on fait deux fois plus de chemin : **d** = v × **t** ;*
- *la distance parcourue est une fonction linéaire de la vitesse : si on va deux fois plus vite, on fait deux fois plus de chemin (en un temps donné t) : **d** = t × **v**.*

Quelle est la vitesse de l'escargot ?



Expliquez la signification de ce graphique.



LES FONCTIONS LINÉAIRES ET AFFINES

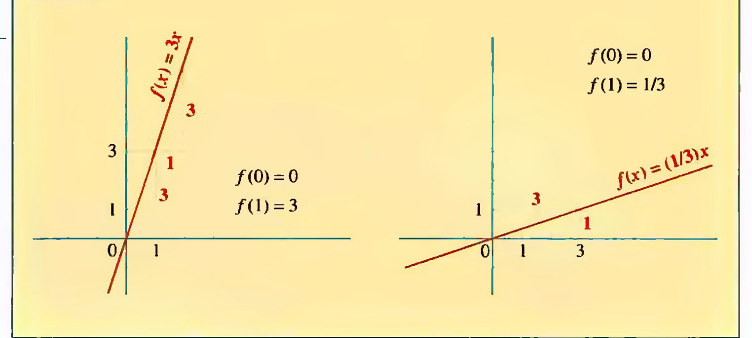
7. 6 Fonctions linéaires

a est un nombre donné. La fonction f qui, à tout nombre x, associe le nombre $f(x)$ égal à ax est appelée fonction linéaire de coefficient a.

Vous l'avez reconnue : une fonction linéaire, c'est une relation de proportionnalité entre les nombres et leurs images.

La représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite qui passe par l'origine du repère. C'est la droite d'équation $y = ax$.

EXEMPLES



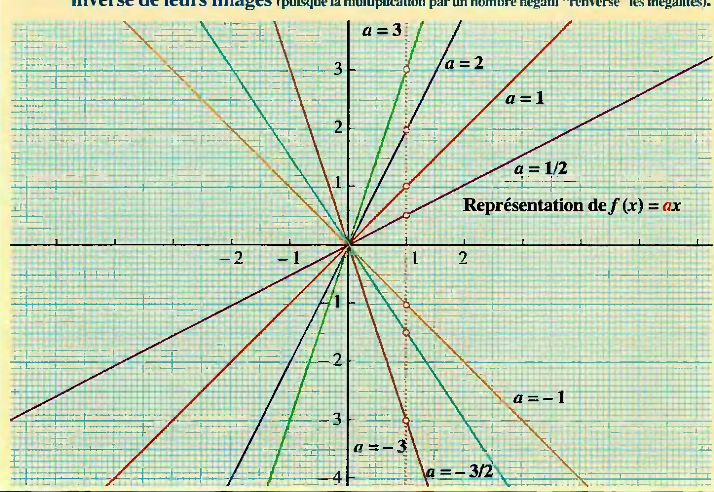
7. 7 Rôle du coefficient a

Le coefficient a donne la pente de la droite :

quand x augmente de 1, $f(x)$ augmente de a.

Si a est positif, la fonction est croissante : les nombres sont dans le même ordre que leurs images.

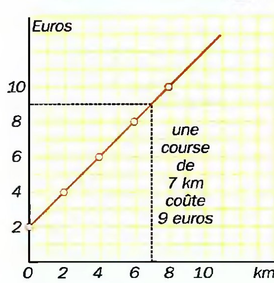
Si a est négatif, la fonction est décroissante : les nombres sont dans l'ordre inverse de leurs images (puisque la multiplication par un nombre négatif "renverse" les inégalités).



Euro le taxi

Le prix d'une course en taxi est typiquement une fonction affine de la distance parcourue : on paye une somme au départ, dite "prise en charge" (par exemple, 2 euros), puis on paye tant le kilomètre (par exemple, 1 euro/km).





7. 8 Fonctions affines

a et b sont deux nombres donnés. La fonction g qui, à tout nombre x, associe le nombre $g(x)$ égal à $ax + b$ est appelée fonction affine.

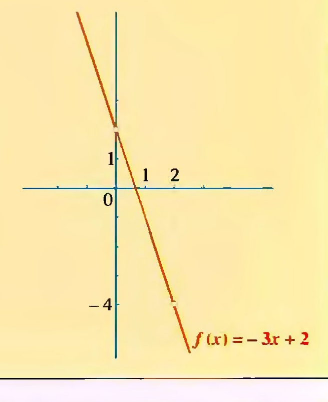
Une fonction linéaire est un cas particulier de fonction affine.

La représentation graphique d'une fonction affine est une droite (qui ne passe pas par l'origine du repère quand la fonction n'est pas linéaire) : c'est la droite d'équation $y = ax + b$.
Il suffit de calculer l'image de deux nombres pour la tracer.

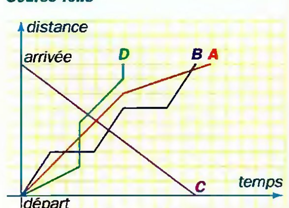
EXEMPLE
Soit $f(x) = -3x + 2$
pour représenter f on fait un petit tableau de valeurs

x	0	2
$f(x)$	2	-4

et on place les deux points de coordonnées calculées



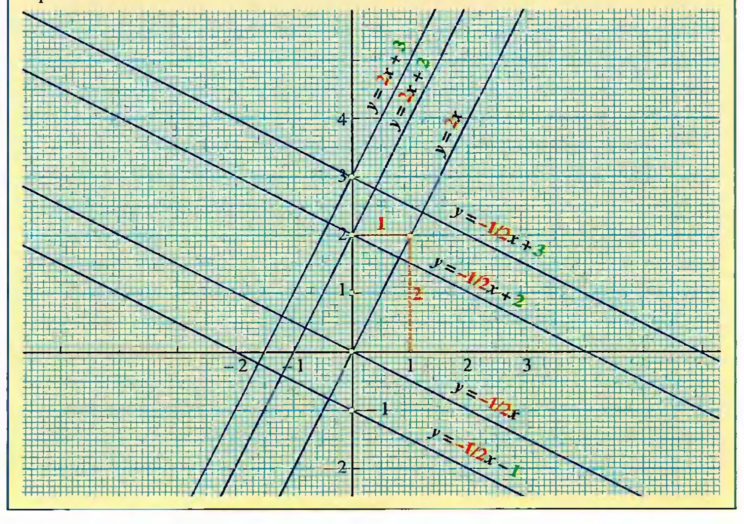
Course folle



Les journalistes disent parfois n'importe quoi ! Jugez vous-même.
Voilà ce qu'on a pu lire et entendre après une course cycliste résumée par le graphique ci-dessus :
1. B a fait toute la course en zigzagant d'un bord à l'autre de la route !
2. B a été le plus régulier !
3. Un coureur avait bêtement confondu le lieu de départ et celui d'arrivée.
4. Il y avait un extra-terrestre dans la course. Il a gagné mais il a été disqualifié.
5. Un infortuné coureur a été victime de deux crevaisons successives !
■ ***Que dire de ces informations et qui a gagné ?***

7. 9 Rôle des coefficients a et b

Dans une fonction affine de la forme $ax + b$, le coefficient a donne la direction de la droite : si a est positif la droite "monte" et plus a est grand, plus elle monte vite ; si a est négatif, elle "descend", et cela d'autant plus vite que a est petit.
b indique l'ordonnée du point d'intersection de la droite avec le deuxième axe du repère.



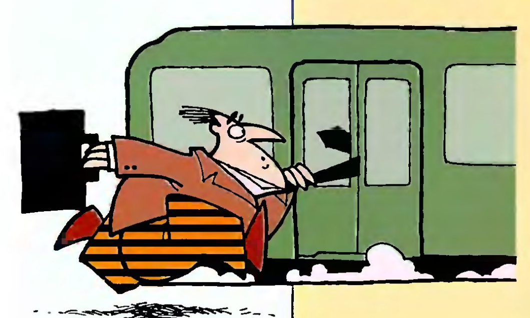
Un bon dessin vaut souvent mieux qu'une longue explication.

7. 10 Un exemple type : avion ou trains

Mr Lelièvre est toujours pressé. C'est pour cela qu'il préfère souvent l'avion, qui vole à 800 km/h de moyenne, au train express qui roule à 200 km/h de moyenne.

L'ennui, c'est qu'il perd à chaque fois trois quarts d'heure de chez lui à l'aéroport et trois quarts d'heure encore de l'aéroport à la ville où il se rend.

Alors avion ou train express ?



Dans les deux cas, il y a une relation entre la distance à parcourir et la durée du parcours. En représentant sur un même graphique ces deux fonctions, on pourra comparer leurs mérites...

Pour parcourir x kilomètres en train express, il faut un certain temps : appelons $t_1(x)$ ce temps exprimé en heures

$$t_1(x) = \frac{x}{200} = 0{,}005x.$$

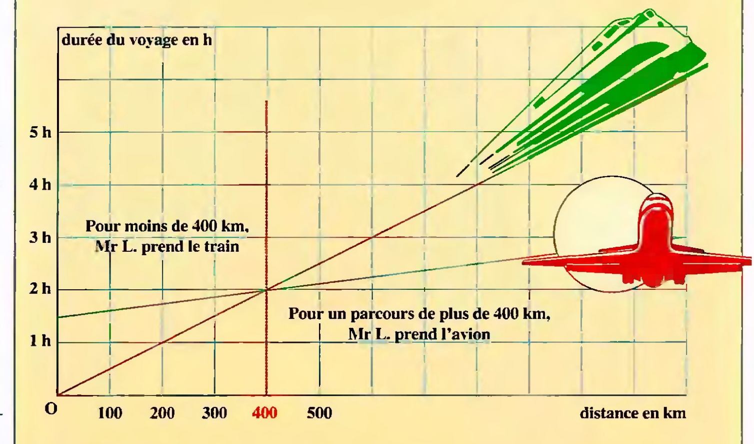
C'est une situation de proportionnalité : la fonction t_1 est linéaire. Les points de la représentation graphique seront alignés.

Pour parcourir x kilomètres en avion, il faut un certain temps : appelons $t_2(x)$ ce temps exprimé en heures

$$t_2(x) = \frac{x}{800} + 1{,}5 = 0{,}00125x + 1{,}5$$

Le temps de trajet vers l'aéroport induit un décalage de départ, mais ensuite il y a une proportionnalité entre distances et durées : la fonction t_2 est affine. Les points de la représentation graphique seront alignés.

Voici la représentation graphique correspondant à chaque moyen de transport.



Pour les données que nous avons choisies, la conclusion apparaît nettement sur le graphique et peut se vérifier facilement par un calcul direct.
Mais il s'agit là d'un "modèle" et la réalité ne fait que lui ressembler...

Les mathématiques servent souvent à se poser les bonnes questions. Et se poser les bonnes questions, c'est déjà presque résoudre le problème.

Dans la situation ici "mathématisée", il ne faut pas tirer des conclusions trop hatives.

Chaque voyage a ses propres particularités et les mathématiques ne remplacent ni l'expérience ni le bon sens.

Cependant elles proposent un modèle qui décrit assez bien la nature des problèmes : ici par exemple le modèle choisi suggère de se poser la question "À partir de quelle distance l'avion est-il plus intéressant que le train ?".

Dans cette situation, on a
- effectué une mise en équation.
- rencontré une fonction linéaire et une fonction affine.
- choisi des unités adaptées pour les représentations graphiques des deux fonctions.
- réalisé et interprété le graphique.

LES LOIS DE L'UNIVERS

Kepler, astronome allemand (1571-1630) découvrit trois lois fondamentales régissant le mouvement des planètes autour du Soleil :

1 L'orbite de chaque planète est une ellipse dont le Soleil est un "foyer".

2 Les aires décrites par le segment soleil-planète sont égales en des temps égaux.

3 Pour la troisième loi, voyez ci-contre...

La loi de Bode

Cette loi, découverte par Wolf en 1741, retrouvée par Titius en 1766, fut publiée par Ebert Bode en 1772 sous la forme suivante :

si n est le numéro de la planète à partir du Soleil, alors cette planète est à la distance

$$D = 0,4 + 0,3 \times 2^{n-1},$$

avec la convention (inhabituelle et momentanée) que 2^0 soit nul.

La loi marche pour
$n = 1$ (Mercure),
$n = 2$ (Vénus),
$n = 3$ (Terre),
$n = 4$ (Mars), mais il faut prendre la valeur $n = 6$ pour Jupiter.

On en "déduisit" que la planète numéro 5 avait disparu et on chercha autour de $d = 2,8$; on trouva là des astéroïdes !

Fonctions astronomiques

Dans notre système solaire, il y a de nombreux corps en mouvement, et ces mouvements sont décrits par de nombreux paramètres.

Les astronomes, pour comprendre les mouvements des planètes qu'ils observaient, ont d'abord cherché les lois de dépendance entre ces paramètres. La connaissance de ces lois a permis ensuite de comprendre la cause du mouvement des planètes et de prévoir des évènements non encore observés.

Kepler découvrit en 1618 la fonction qui relie la distance moyenne des planètes au soleil et leur durée de révolution autour du soleil.

Pour ces six planètes alors connues, on disposait des données ci-dessous :

planète	x = distance moyenne au soleil (en unité astronomique : distance Terre-Soleil)	d = durée de révolution (en années)	
Mercure	0,39	88 j =	0,24 ans
Vénus	0,72	225 j =	0,72 ans
Terre	1	365 j =	1 an
Mars	1,52	1 an 322 j =	1,88 ans
Jupiter	5,2	11 ans 315 j =	11,86 ans
Saturne	9,54	29 ans 167 j =	29,46 ans

On vérifie, à la calculatrice, que $x^3 \approx d^2$.

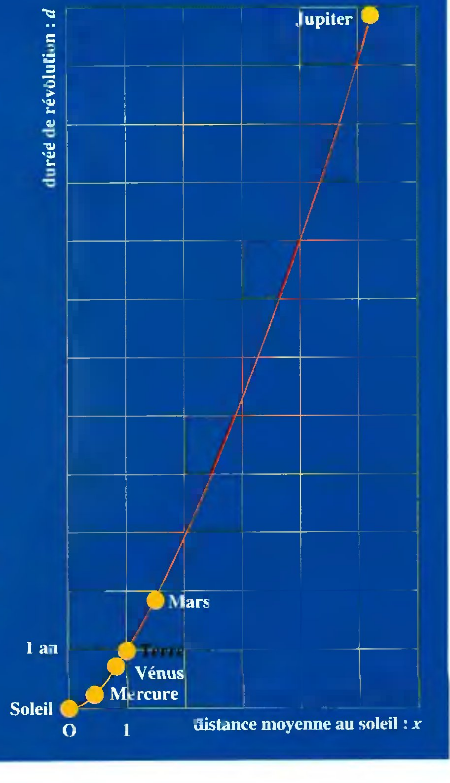
Cette relation définit une fonction d de x, que l'on peut traduire par la formule

$$d(x) = \sqrt{x^3}.$$

C'est ainsi que l'on a pu calculer les distances au soleil des planètes découvertes ultérieurement, à partir de leurs durées de révolution.

Voici, ci-contre, la représentation graphique de cette fonction.





Test 7

Pour chacune des 10 questions, indiquer la ou les bonnes réponses parmi A, B, C, D ou E

	Questions	A	B	C	D	E
1	$f : x \mapsto -6x$ Alors…	$f(0) = -6$	$f(0) = 0$	$f(-6) = 1$	$f(1) = -6$	1 a pour antécédent -6
2	On donne l'application f définie par $f(x) = 2 + 10x$. L'image de 2 est…	14	20	22	$f(2)$	0
3	On donne l'application f définie par $f(x) = 2 + 10x$. L'antécédent de 2 est…	20	22	$f(2)$	0	$f(-0{,}2)$
4	k est linéaire. $k(3) = 9$. Alors, pour tout nombre x, …	$k(x) = 9$	$k(x) = 3$	$k(x) = 9x$	$k(x) = 3x$	$k(x) = 2x + 3$
5	g est affine. $g(0) = 3$. $g(3) = 0$. Alors, pour tout nombre x, …	$g(x) = 3x + 3$	$g(x) = x - 3$	$g(x) = 3x - 3$	$g(x) = -x - 3$	$g(x) = -x + 3$
6	Combien de fonctions affines sont représentées ?	0	2	3	4	5
7	Combien de fonctions linéaires sont représentées ?	0	2	3	4	5
8	Réduction des prix de 20 %. La fonction qui associe à l'ancien prix le nouveau prix est…	croissante	affine	décroissante	linéaire	constante
9	Réduction des prix de 20 %. La fonction qui associe à l'ancien prix la réduction est…	croissante	affine	décroissante	linéaire	constante
10	La fonction qui au côté du carré associe son aire est…	croissante	affine	décroissante	linéaire	constante

THÈME 8

Organiser les données

Les nombres sont partout. On les utilise à mesurer les opinions, les voix, les gains, les coûts, les déficits et bien d'autres choses encore.
L'organisation de ces multiples données est l'objet d'une branche importante des mathématiques : les statistiques.
La statistique n'est pas un art gratuit : des tableaux et graphiques produits résultent des analyses qualitatives et orientent les prises de décision.

Statistiques

Statistiques, du latin *status*, signifiant d'abord ***"être debout"***, puis ***"l'état"*** d'un homme, mais aussi celui d'une cité. Les *statistiques* sont d'abord l'ensemble des renseignements numériques qui permettent de gérer correctement un état.

Organiser des données

Une étude statistique récente portant sur un grand quotidien a montré qu'un numéro du journal contient en moyenne 1520 données chiffrées diverses que le lecteur est censé interpréter. Devant une telle avalanche, chacun de nous doit s'organiser.

Représentations graphiques

Ceux d'entre vous qui fonctionnent auditivement sont sans doute ravis d'entendre les cours de la Bourse égrénés à la radio. Les autres préfèreront voir des graphiques qui parlent plus qu'un long discours.

Indicateurs statistiques

Pour résumer une série de données, rien de tel qu'un bon indicateur statistique. Moyenne, mode et médiane sont là pour vous aider à synthétiser l'information.

La cryptographie

POUR COMMUNIQUER ENTRE-EUX, sans être compris par les espions ennemis, les stratèges lacédémoniens écrivaient sur des bandelettes enroulées sur un cylindre. La bandelette déroulée n'était pas facile à lire !
C'est dommage, car le message (envoyé par Galilée lui-même) vaut la peine d'être déchiffré complètement.
Jules César préférait opérer un décalage de l'alphabet. Ainsi A devenait E, B devenait F... comme sur le dessin ci-contre. Pour déchiffrer un tel message, il est bon de connaître les "fréquences statistiques" des lettres de l'alphabet ! En français par exemple : le E a une fréquence de 18 %, les S, A, R, T, I, N de 7 à 8 %, puis viennent les U, L, O, C...

- Avec ces simples renseignements statistiques vous pouvez sûrement décoder le message suivant :

HW NKYDA PWNLAEAJJA AOP LNAD ZQ YWLETKHA !

Exemple de statistique
Dans une certaine population de 100 élèves de Troisième, il y a :
5 élèves de 13 ans ;
60 élèves de 14 ans ;
35 élèves de 15 ans.
Il se trouve qu'il y a aussi :
5 élèves aux cheveux blonds ;
60 élèves aux cheveux châtains ;
35 élèves aux cheveux noirs.
Lorsque le "caractère" est numérique, on peut faire des "opérations" (qui n'ont pas de sens lorsque le caractère est qualitatif).

Ici que représente le nombre $\frac{5 \times 13 + 60 \times 14 + 35 \times 15}{100}$ **?**

ORGANISER DES DONNÉES

8. 1 Des données brutes

Dès qu'il y a beaucoup de données il faut tenter de les organiser pour pouvoir les interpréter. Vous ne l'avez peut-être jamais remarqué :
il y a deux sortes de données statistiques, décrites dans les deux paragraphes qui suivent.

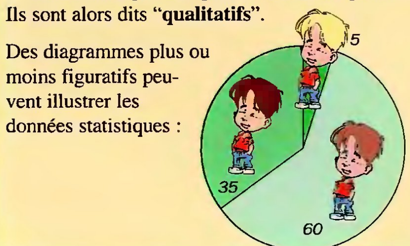
8. 2 Statistiques sur une population

Les statistiques servent à décrire une **population**. Le mot "population" désigne l'ensemble dont on étudie les caractères.

Le nombre d'individus (ou de choses) composant une population s'appelle l'*effectif* de cette population.

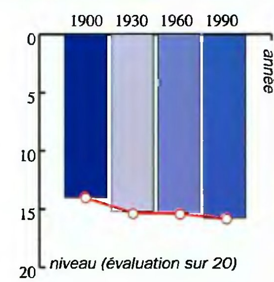
Les caractères étudiés peuvent alors :
— être donnés par des nombres : âge, masse, longueur.
Ce sont des **caractères quantitatifs**.
— être donnés par des qualités : couleur, profession, sexe.
Ils sont alors dits "**qualitatifs**".

Des diagrammes plus ou moins figuratifs peuvent illustrer les données statistiques :





Notes au fil du temps



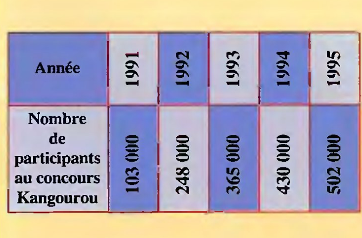
Le niveau des élèves baisse-t-il ?

8. 3 Statistiques d'évolution dans le temps

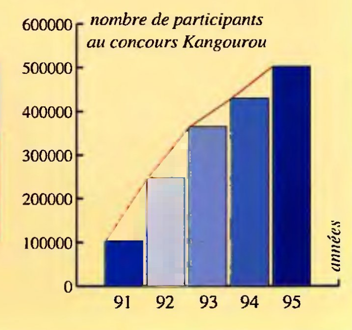
Certaines données statistiques concernent une mesure, une quantité, qui évolue dans le temps.

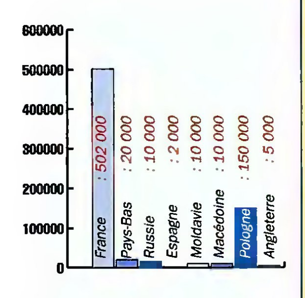
EXEMPLES
"L'indice des prix"qui évolue en fonction de l'année.
Les températures qui évoluent en fonction …du temps.
Le nombre d'individus présents sur notre planète des origines à nos jours.

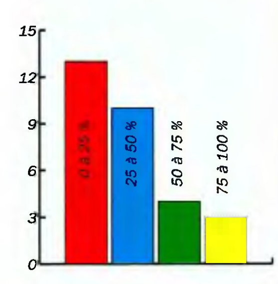
Ces données se décrivent par un tableau ou par un graphique sur lequel l'on porte le temps en abscisse et la valeur de la mesure en ordonnée.
Ce sont des données de type **chronologiques**.

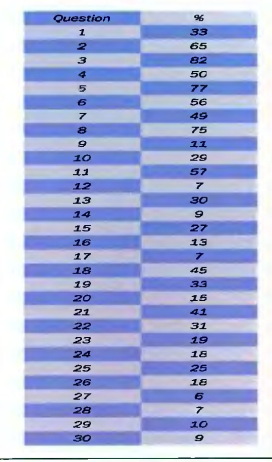


Année	1991	1992	1993	1994	1995
Nombre de participants au concours Kangourou	103 000	248 000	365 000	430 000	502 000



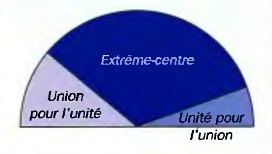






Question	%
1	33
2	65
3	82
4	50
5	77
6	56
7	49
8	75
9	11
10	29
11	57
12	7
13	30
14	9
15	27
16	13
17	7
18	45
19	33
20	15
21	41
22	31
23	19
24	18
25	25
26	18
27	6
28	7
29	10
30	9

Serez-vous capable de retrouver, à vue d'œil, les pourcentages obtenus par chacun des trois partis aux dernières élections ?



8. 4 Regroupement en classes

— Quand le caractère considéré est qualitatif, la population est naturellement partagée en **classes** de même caractère.

EXEMPLE
Population : les participants au concours Kangourou Européen 95.
Caractère étudié : le pays où le concours a été passé.
Les classes sont tout naturellement les pays participants : France, Angleterre, Pays-Bas, Pologne, Russie, etc.

— Quand le caractère est quantitatif, il est souvent utile d'effectuer des regroupements pour avoir des classes significatives.

La "finesse" des classes dépend de l'usage que l'on veut faire des résultats.

EXEMPLE
Population : les 100 élèves de troisième d'un collège. Caractère étudié : l'âge.
Il est significatif de regrouper dans la classe "13 ans" ceux qui on en fait, entre 13 ans exactement et 14 ans exactement,...

EXEMPLE
Population : les trente questions du concours Kangourou 95.
Caractère étudié : le pourcentage de bonnes réponses.
Il est naturel de regrouper dans la même classe les questions ayant obtenu, par exemple, entre 0% et 25% de bonnes réponses (en rouge dans le tableau en marge), entre 25% et 50% (en bleu), entre 50% et 75% (en vert) et plus de 75% (en jaune).

8. 5 Tableaux d'effectifs

La présentation en tableau permet d'appréhender les effectifs des différentes classes d'un seul coup d'œil. Par exemple :

pourcentage de bonnes réponses	0 à 25 %	25 à 50 %	50 à 75 %	75 à 100 %
nombre de questions	13	10	4	3

8. 6 Calcul de fréquences

Les effectifs n'ont pas une grande signification en eux-mêmes, vu qu'ils dépendent de l'effectif total de la population.
Ce qui est intéressant, c'est le rapport entre l'effectif de la classe et l'effectif total. Cela permet de mieux pouvoir comparer des caractères sur des populations d'effectifs différents.

On appelle *fréquence* d'une classe, le quotient de l'effectif de cette classe par l'effectif total.

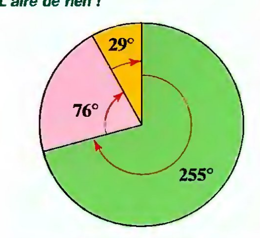
Il est naturel de traduire ces fréquences en **pourcentage**, c'est-à-dire de ramener les données à un effectif fictif de 100 individus.

EXEMPLE
Pour calculer le pourcentage p d'élèves polonais ayant participé au concours, on calcule d'abord l'effectif total des participants : 709 000. D'où

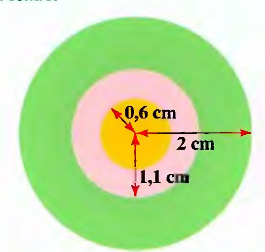
$$\frac{150\,000}{709\,000} = \frac{p}{100}, \text{ d'où } p = \frac{150 \times 100}{709} \approx 21.$$

Il y a eu environ 21 % d'élèves polonais dans les participants du Kangourou 1995.

L'aire de rien !



■ ***Vérifier que les angles indiqués ont bien des mesures proportionnelles aux fréquences statistiques de la situation ci-contre.***



■ ***Vérifier que les aires colorées ont des mesures presque proportionnelles aux fréquences statistiques.***

8. 7 Des tableaux de fréquence

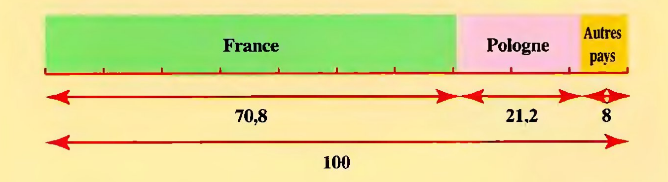
Après avoir calculé les fréquences en pourcentage, on peut regrouper les résultats dans un tableau.

Pour les participants au concours Kangourou européen 95

Pays	France	Pologne	Pays-Bas	Russie	Macédoine	Moldavie	Angleterre	Espagne
Participation	70,8 %	21,2 %	2,8 %	1,4 %	1,4 %	1,4 %	0,7 %	0,3 %

Normalement, la somme des fréquences de toutes les classes doit être 100. Comme chaque fréquence est un résultat de division, on a procédé à des arrondis et ces erreurs d'arrondis peuvent donner un total légèrement différent de 100 : ce n'est pas grave.

Graphiquement, on représente souvent les fréquences par un diagramme de type linéaire dans lequel une certaine longueur représente 100 %. En voici un exemple :



Voir aussi en marge des représentations de type circulaire.

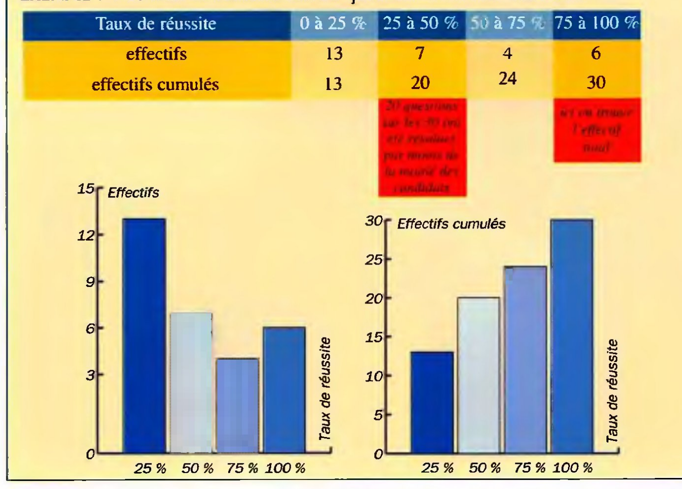
8. 8 Effectifs et fréquences cumulés

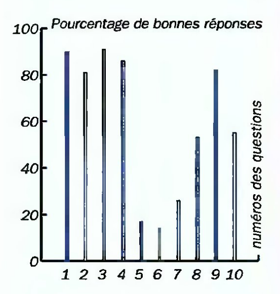
Quand les caractères étudiés sont numériques, et de ce fait ordonnés, cela peut avoir un sens d'ajouter les effectifs de deux ou plusieurs classes.

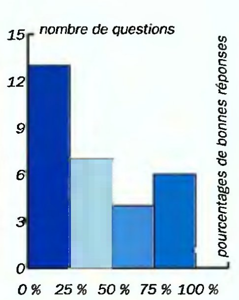
On obtient l'*effectif cumulé* d'une classe en ajoutant à l'effectif de cette classe l'effectif des classes inférieures.

EXEMPLE : Les taux de réussite aux 30 questions concours cadets 95

Taux de réussite	0 à 25 %	25 à 50 %	50 à 75 %	75 à 100 %
effectifs	13	7	4	6
effectifs cumulés	13	20	24	30
		[illegible]		[illegible]







REPRÉSENTATIONS GRAPHIQUES

Effectifs et fréquences s'écrivent en tableau. Ils se prêtent aussi à des représentations graphiques diverses qui toutes ont le même but :

permettre de prendre connaissance d'un seul coup d'œil de l'ensemble des résultats d'une statistique et en faire aussi plus facilement une analyse.

8. 9 Diagramme en bâtons

Dans cette représentation, à chaque classe correspond un segment dont la longueur est proportionnelle à l'effectif. Il s'utilise de façon naturelle quand les caractères ne sont pas regroupés en classes.

8. 10 Histogrammes

L'histogramme est le frère "épais" du diagramme en bâtons. Il est naturel de l'utiliser lorsqu'un regroupement en classes a été effectuée.

À chaque classe correspond un rectangle dont l'aire est proportionnelle à l'effectif de la classe. En général, les classes sont choisies de même amplitude.

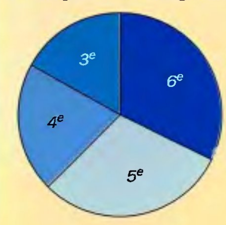
Les rectangles sont de largeur constante et cette proportionnalité sur les aires est aussi une proportionnalité sur les longueurs.

Mais il faut être vigilant, car les impressions produites par un graphique peuvent être faussées, par exemple par des choix d'unités trafiqués ou par une confusion entre longueur et aire.

8. 11 Diagrammes circulaires et semi-circulaires

L'effectif total est représenté par un disque (ou un demi-disque). Chaque classe est représentée par une tranche dont l'angle au centre est proportionnel à son effectif.
Pour réaliser une telle représentation, il faut faire appel au mécanisme de la proportionnalité, l'effectif total correpondant à l'angle au centre de 360° (ou 180° pour un demi-disque).

EXEMPLE
Participation au Kangourou 95 par niveau



Sixième : 163 000.

Calcul de l'angle au centre : $\frac{163\,000}{502\,000} = \frac{x}{360}$, $x \approx 117°$

Cinquième : 152 000.

Calcul de l'angle au centre : $\frac{152\,000}{502\,000} = \frac{y}{360}$, $y \approx 109°$

Quatrième : 103 000. Calcul de l'angle au centre : $\frac{103\,000}{502\,000} = \frac{z}{360}$, $z \approx 74°$

Troisième : 84 000. Calcul de l'angle au centre : $\frac{84\,000}{502\,000} = \frac{t}{360}$, $t \approx 60°$.

Ici aussi, attention aux interprétations : voyez les diagrammes de la page précédente, illustrant le paragraphe 8.7.

La bonne pointure

Le statisticien de Mr Chausson, marchand de chaussures a calculé que la moyenne des pointures vendues cette année était de 41,7.

■ ***Mr Chausson doit-il faire fabriquer un lot de chaussures pointure 41,7 pour sa prochaine collection?***



Salaires

PDG : 50 000 F mensuel
Mr X : 8 210 F mensuels
Mr Y : 7 500F mensuels
Mr Z : 8 200 F mensuels.



Le Nabab Heloued

En moyenne, ses 10 000 sujets possèdent 8 000 roupies, et la médiane de leurs fortunes est de 5 000 roupies. Si l'on ajoute les fortunes immenses du nabab et de sa femme, la moyenne passe à 10 000 roupies, et la médiane à 6 000 roupies.

■ ***Que peut-on en déduire ?***

Question 1 du Kangourou 95

Le concours Kangourou a lieu tous les ans une fois par an. Le premier Kangourou a eu lieu en mai 1991.

En l'an 2000, ce sera :
A le 8ᵉ Kangourou
B le 9ᵉ Kangourou
C le 10ᵉ Kangourou
D le 100ᵉ Kangourou
E le 101ᵉ Kangourou ?

■ INDICATEURS STATISTIQUES

Pour mieux résumer une série statistique, on utilise des nombres judicieusement choisis pour être représentatifs de la série : c'est le sens de la **moyenne**, du **mode** ou de la **médiane**.

8. 12 Moyenne

La moyenne s'obtient en ajoutant les produits des valeurs du caractère par leur effectif et en divisant par l'effectif total.

Attention : la moyenne n'a de sens que pour des statistiques portant sur un caractère numérique.

EXEMPLE

Voici les scores des 10 premiers élèves de sixième au Kangourou 95 :

Scores	143.75	135	127.5	123.75	122.5	121.25	119.75
effectif	1	1	1	2	1	3	1

$$\text{moyenne} = \frac{143{,}75 + 135 + 127{,}5 + 123{,}75 \times 2 + 122{,}5 + 121{,}25 \times 3 + 119{,}75}{10}$$

$$\text{moyenne} = \frac{1\,259{,}75}{10} \approx 125{,}6.$$

Le score moyen des dix meilleurs élèves de sixième était en 1995 de 125,6.

8. 13 Médiane

Une médiane est un nombre tel que il y ait autant d'effectif correspondant à une valeur inférieure à cette médiane que d'effectif correspondant à une valeur supérieure.

Attention : la médiane n'a de sens que pour des statistiques portant sur un caractère ordonné.

EXEMPLE

Dans la statistique ci-dessus, il y a eu 5 scores supérieurs ou égaux à 123,75 et 5 inférieurs ou égaux à 122,50. La médiane est donc ici comprise entre 122,50 et 123,75. Elle est inférieure à la moyenne qui, elle, est tirée vers le haut par les "gros" scores.

8. 14 Mode

Le mode est la valeur du caractère la plus répandue, c'est-à-dire qui a le plus grand effectif.

EXEMPLE

Voici les réponses choisies par les élèves de sixième à la question 1 du Kangourou 95.

Le mode, c'est à dire la réponse qui a recueilli le plus grand effectif est la B. Dommage, le mode n'est pas la bonne réponse qui était la C.

A	B	C	D	E	non réponse
2.1 %	62.5 %	33.1 %	0.7 %	0.5 %	1.1 %

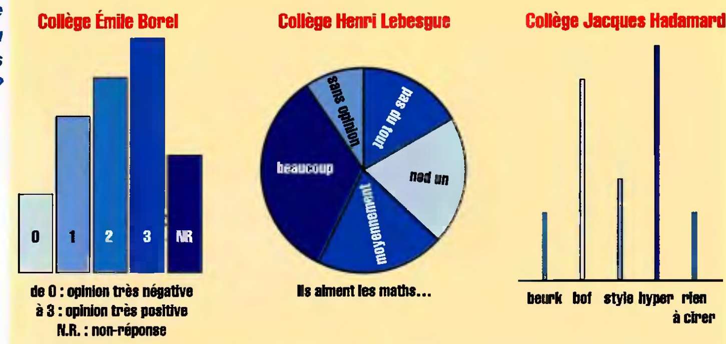
CAMEMBERT, HISTOGRAMME BÂTON

Savez-vous interpréter correctement un graphique statistique ? Notre intuition est-elle toujours pertinente ou les images nous trompent-elles ?

8. 15 Un exemple-type : image de marque

Chargés de sonder des collégiens dans trois collèges, trois instituts de sondage ont interrogé les élèves sur l'idée qu'ils se faisaient des mathématiques. Ils ont rendu leurs conclusions sous des formes différentes.

Dans quel collège y a-t-il, proportionnellement, le plus d'amateurs de mathématiques ?



Pour répondre à la question, il faut comparer les fréquences de chaque opinion dans les différents collèges. Il faut donc dresser, à partir des graphiques, des tableaux de fréquence.

Émile Borel	0	1	2	3	NR
Nombre de réponses en %	10 %	20 %	25 %	30 %	15 %

On a utilisé ici la proportionnalité entre l'aire des rectangles et la fréquence.
Par exemple, le rectangle opinion 3 a une aire de 3 cm^2 sur un total de 10 cm^2, soit 30%.

Henri Lebesgue	pas du tout	un peu	moyen	beaucoup	sans opinion
Nombre de réponses en %	18 %	22 %	22 %	36 %	2 %

On a utilisé ici la proportionnalité entre l'angle au centre et la fréquence.
Exemple "beaucoup "= angle de 130° sur un total de 360°, soit 36%.

Jacques Hadamard	beurk	bof	style	hyper	rien à cirer
Nombre de réponses en %	10 %	30 %	15 %	35 %	10 %

On a utilisé ici la proportionnalité entre la longueur des segments et la fréquence.
Par exemple, le bâton des "hyper" mesure 3,5 cm sur une longueur totale de bâtons de 10 cm, soit 35% .

C'est donc au collège Henri Lebesgue qu'il semble y avoir le plus d'enthousiastes.
Et si on ajoute les opinions plutôt bonnes, on trouve 55 % au collège Émile Borel, 58 % au collège Henri Lebesgue et 50 % au collège Jacques Hadamard.
Mais les résultats sont-ils vraiment comparables ?

Dans cette situation, on a

- rencontré un histogramme, un diagramme en bâtons et un diagramme circulaire.
- dressé des tableaux de fréquences
- interprété des diagrammes et des tableaux.

Test 8

Pour chacune des 10 questions, indiquer la ou les bonnes réponses parmi A, B, C, D ou E

	Questions	A	B	C	D	E
1	L'effectif total est de 250. Si la fréquence est *f* /100, je trouve l'effectif en…	divisant *f* par 100/250	multipliant *f* par 100/250	multipliant *f* par 250/100	divisant *f* par 250/100	multipliant *f* par 2,5
2	Où y a-t-il 20 % de l'effectif colorié ?					
3	Quel est le pourcentage noirci ?	90 %	40 %	25 %	50 %	12,5 %
4	Un angle au centre de 30° dans un diagramme semi-circulaire, cela représente…	environ 8 %	1/12	1/6	environ 33 %	environ 17 %
5	Un angle au centre de 30° dans un diagramme circulaire, cela représente…	8 %	1/12	1/6	environ 33 %	environ 17 %
6	Maths : 15 (coefficient 2) Français : 20 (coefficient 3) Moyenne ?	15	17	17,5	18	20
7	Dans un diagramme circulaire, un effectif de 100 sur un total de 900 donnera une tranche de…	10°	18°	36°	40°	90°
8	La moyenne de cette série est…	10	11	12	13	14
9	La médiane de cette série est…	10	11	12	13	14
10	Le mode de cette série est	10	11	12	13	14

note	effectif
9	4
10	8
13	7
14	3
15	1
18	2

THÈME



La règle et le compas

La géométrie plane tente de rendre compte de ce que l'on peut faire avec un crayon, une règle et un compas sur une feuille de papier.
Le plus petit objet de cette géométrie est le point.
Avec des points, on fabrique des objets plus élaborés : droites, demi-droites, segments, cercles, etc.
La géométrie n'est pas autre chose que l'étude des relations entretenues par ces objets et des liens qu'ils tissent avec le domaine numérique : distances, angles, longueurs, aires...

Les objets de base de la géométrie

Géométrie : du grec *géo* (la terre) et *metron* (mesure).
Les premiers "géomètres" de l'histoire étaient des fonctionnaires égyptiens qui savaient "mesurer la terre".

Droites parallèles et perpendiculaires

Croisent-ils leurs regards ? Regardent-ils dans la même direction ? Est-elle à l'autre ce qu'il est pour elle ? Les relations entre parallélisme et orthogonalité sont le début d'une grande aventure.

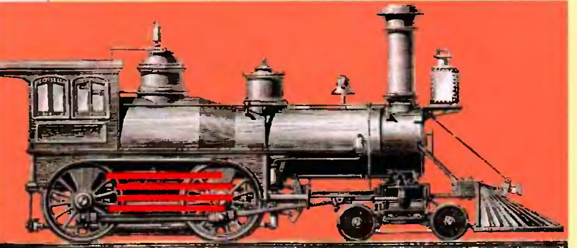
Distances

Points et points, points et droites, tout ce beau monde se tient à distance.
Et quand ils se tiennent à la même distance, on tourne en rond...

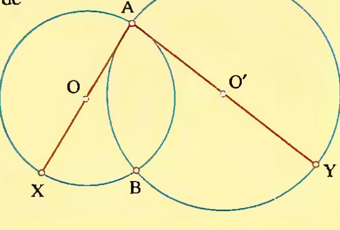
Équidistance

Comment faire régner l'équité ? Se tenir à égale distance de deux points : c'est une médiatrice qu'il vous faut.
Se tenir à égale distance de deux droites sécantes : voyez du côté des bissectrices.

Pourquoi et comment ?

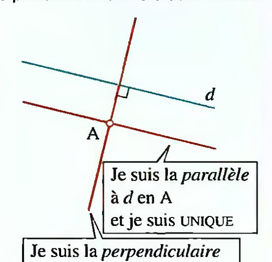


DANS UNE LOCOMOTIVE, la bielle reste parallèle à elle-même tout en décrivant des cercles avec ses extrémités. L'apprentissage de la géométrie réserve ainsi bien des surprises à celui qui sait les voir et les apprécier...
Ainsi, par exemple, dessinez deux cercles de rayons bien différents et se coupant en A et B. Tracez les diamètres d'extrémité A ; leurs autres extrémités, sur chacun des cercles sont X et Y.
Que se passe-t-il pour les points X, B, Y ?
Essayez avec d'autres cercles, avec des cercles, dont l'un contient le centre de l'autre...
Saurez-vous expliquer pourquoi il arrive ce qui arrive ? (Voir **9.3** et **9.15**.)



Pour désigner les objets géométriques, les mathématiciens sont allés au plus simple et leur ont donné des lettres comme nom. Pour se faciliter encore la vie, ils ont pris quelques habitudes : des lettres majuscules pour les points (A, B,...), des petites lettres (d, d',...) ou des lettres grecques (δ, Δ) pour les droites.
De même, ils respectent un certain nombre de notations qui évitent d'écrire trop de mots :
(AB) pour la droite qui passe par A et B ;
[AB] pour le segment d'extrémités A et B ;
[AB) pour la demi-droite d'origine A qui passe par B ;
AB pour la distance du point A au point B.

Le point A et la droite d sont donnés.

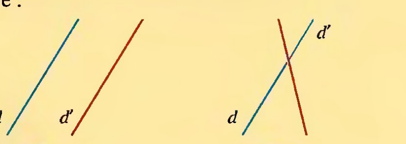


Pair-impair
a) Dans une certaine famille de droites, tout le monde est numéroté et chacun est perpendiculaire au précédent :
$d_1 \perp d_2$, $d_2 \perp d_3$, $d_3 \perp d_4$ *et ainsi de suite...*
■ ***Comment sont*** d_1 ***et*** d_9, d_2 ***et*** d_8, d_3 ***et*** d_{24}, d_{100} ***et*** d_{1000} ***?***
b) Dans une autre famille de droites, chacun est alternativement parallèle ou perpendiculaire au précédent :
$d_1 // d_2$, $d_2 \perp d_3$, $d_3 // d_4$, $d_4 \perp d_5$ *et ainsi de suite...*
■ ***Comment sont*** d_1 ***et*** d_9, d_2 ***et*** d_8, d_3 ***et*** d_{24}, d_{100} ***et*** d_{1000} ***?***

■ PARALLÈLES ET PERPENDICULAIRES

9. 1 Droites parallèles

Il y a seulement 3 cas possibles pour la position relative de deux droites. Elles peuvent être :



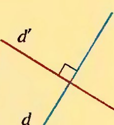
d / d'

disjointes — *aucun point commun*
sécantes — *un seul point commun*
confondues — *tous les points communs*

On appelle parallèles deux droites soit disjointes, soit confondues.
L'ensemble des droites parallèles à une droite donnée *d* s'appelle la direction de *d*.

9. 2 Droites perpendiculaires

On appelle perpendiculaires deux droites sécantes à angle droit. On dit aussi "orthogonales".



9. 3 Deux propriétés d'unicité

Par un point donné passe une et une seule droite parallèle à une droite donnée.
Par un point donné passe une et une seule droite perpendiculaire à une droite donnée.

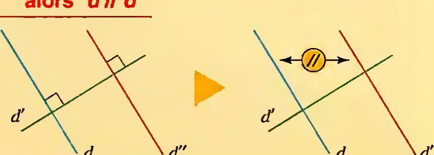
Voici des propriétés de l'orthogonalité et du parallélisme "évidentes" mais importantes.

9. 4 Si $d // d'$ et $d' // d''$ alors $d // d''$

Autrement dit **: si deux droites (*d* et *d'*) sont parallèles, toute parallèle (*d''*) à l'une (*d'*) est parallèle à l'autre (*d*).**

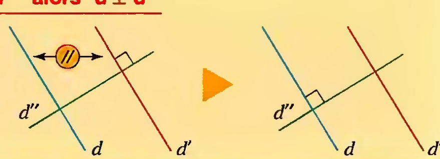
9. 5 Si $d \perp d'$ et $d' \perp d''$ alors $d // d''$

Autrement dit **: si deux droites (*d* et *d''*) sont perpendiculaires à une même troisième (*d'*) alors elles sont parallèles entre elles.**



9. 6 Si $d // d'$ et $d' \perp d''$ alors $d \perp d''$

Autrement dit **: si deux droites (*d* et *d'*) sont parallèles, toute perpendiculaire (*d''*) à l'une (*d'*) est perpendiculaire à l'autre (*d*).**



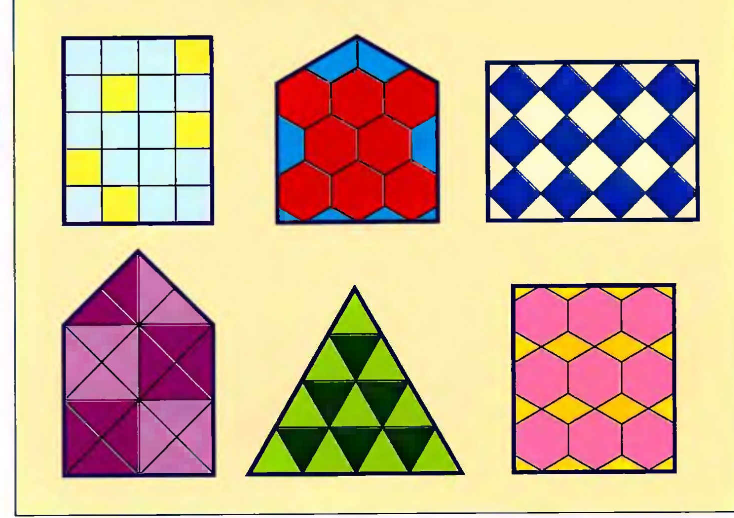
L'important, c'est la rose
Les anciennes cartes de navigation montrent seize ou trente-deux directions groupées sur de magnifiques "roses des vents".



9. 7 Exemple type : *l'exercice du vitrier*

Un artisan vitrier propose des modèles de vitraux différents. Le prix de chaque vitrail s'obtient en multipliant par 5 000 F le nombre de directions de droites présentes à l'intérieur de la fenêtre.

■ *Calculer le prix pour chacun des six modèles.*



Définitions de la droite
Avant l'époque moderne, de nombreux mathématiciens ont essayé de donner une définition de la « droite » qui coïncide assez bien avec l'idée concrète que l'on peut en avoir.
Voici quelques tentatives :
1. *La ligne droite est la ligne dont les extrémités sont ombragées par les points intermédiaires* (Platon. IVᵉ s. av. J.-C.).
2. *La droite est la ligne telle que si l'on immobilise deux de ses points, tous les autres sont immobilisés par cela seul* (Leibniz. 1769).
3. *La ligne droite est le plus court chemin d'un point à un autre* (Ant. Arnauld. 1667 – Varignon. 1731 – Legendre. 1794).
4. *La ligne droite est une série de points dont chacun est à égale distance de trois points donnés* (Fourier. 1795).
5. *La ligne droite est une ligne de direction constante. La ligne courbe est une ligne dont la direction change en chaque point* (Ueberweg, d'après Delbœuf, 1860).
Quelle est la définition qui vous paraît la plus pertinente ?

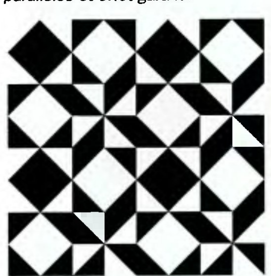
9. 8 Les éléments d'Euclide

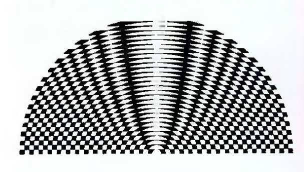


Le mathématicien grec Euclide fut le fondateur de notre géométrie. Il vécut à Alexandrie (Égypte) au vᵉ siècle avant J.-C. Euclide n'a pas inventé la géométrie, mais, dans son premier "livre" ***Les Éléments***, il a mis en ordre les idées de son temps sur le sujet.
Tout son livre est admirablement organisé.
Tout d'abord, il donne des **définitions**. Par exemple pour l'angle droit : **Lorsqu'une droite tombant sur une droite fait deux angles de droites égaux entre eux, chacun des angles égaux est droit**. (Son style n'est évidemment pas tout à fait celui d'aujourd'hui.)
Puis il pose un certain nombre de **demandes**, que l'on appelle aujourd'hui "postulats" ou "axiomes". Voici la cinquième de ces demandes (elle justifie la première partie de l'énoncé **9. 3**) : **Si une droite, tombant sur deux droites, fait des angles intérieurs plus petits que deux droits, ces droites, prolongées à l'infini, se rencontrent du côté où les angles sont plus petits que deux droits.**
Et ensuite, à partir de ces définitions et de ces demandes, il **démontre** des propriétés qui peuvent alors s'appeler des **théorèmes**…

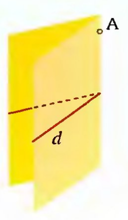
Dessiner avec des perpendiculaires
Marquer deux points A et B distants d'une dizaine de centimètres.
Tracer une droite passant par A, puis la perpendiculaire à cette droite issue de B. Recommencer avec une nouvelle droite passant par A et sa perpendiculaire issue de B. Recommencer avec de nombreuses droites ; vous obtiendrez un beau dessin, un instrument de mesure de vos qualités de patience et de soin, et en prime un théorème célèbre. Lequel ?

Dessiner avec un réseau de parallèles
Voici deux dessins à reproduire en grand : entraînement au tracé de parallèles et effet garanti.





***Plier une feuille de papier** le long d'une droite passant par A, de manière que les deux parties d'une droite d viennent l'une sur l'autre :*
*La trace du pli est la **perpendiculaire** à la droite d !*



COMMENT CONSTRUIRE DES DROITES PARALLÈLES ?

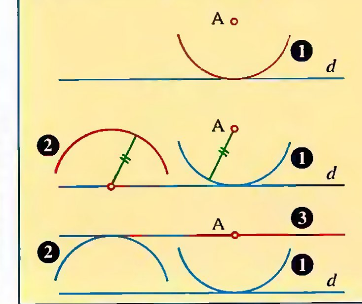
Données : une droite d et un point A. **À tracer :** la parallèle à d passant par A.

Sur papier quadrillé

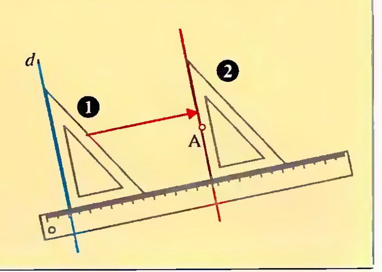
Ne pas hésiter à utiliser les carreaux, de la feuille, mais pas forcément en suivant les lignes !

Sur papier blanc

En deux coups de compas :
le truc des chaudronniers.



Avec équerre et règle
L'équerre glisse le long de la règle de la position 1 la position 2.

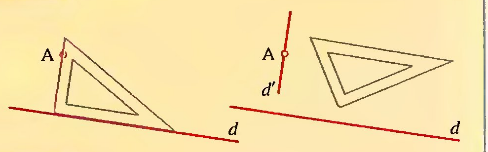


COMMENT CONSTRUIRE DES DROITES PERPENDICULAIRES ?

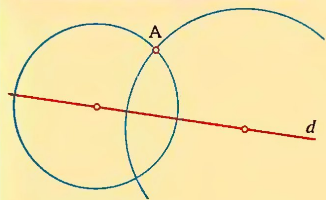
Données : une droite d et un point A. **À tracer :** la perpendiculaire à d passant par A.

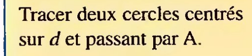
Avec une équerre

C'est l'instrument approprié. Pourtant mieux vaut éviter le coin, souvent ébréché, et prolonger les droites à la règle.

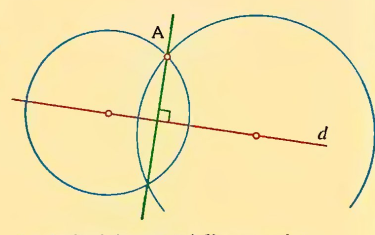


Avec un compas





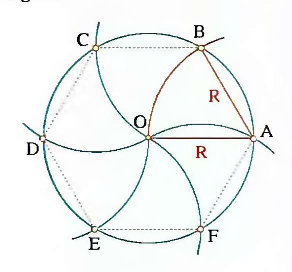
Tracer deux cercles centrés sur d et passant par A.



La droite joignant A à l'autre point d'intersection des cercles est perpendiculaire à d.

Sur la planète mathématique, deux mondes cohabitent harmonieusement. Le monde des nombres et le monde des points. Un pont important entre ces deux mondes est la notion de distance, qui permet de traduire en termes de nombre des propriétés géométriques.

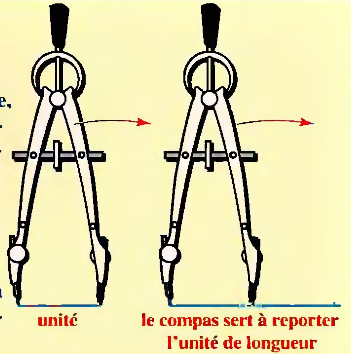
L'hexagone magique
Si à partir d'un point A d'un cercle, on reporte des distances égales au rayon du cercle, on construit un hexagone régulier.



DISTANCES

9. 9 Distance entre deux points

Une unité de longueur étant choisie, on peut, à deux points A et B, associer un *nombre positif* appelé *distance* entre A et B.
On note ce nombre AB.



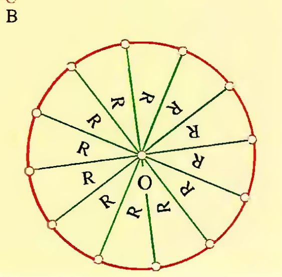
9. 10 Milieu

Le point du segment [AB] situé à égale distance de A et de B s'appelle le *milieu* du segment [AB].

A I B

9. 11 Cercle

Le *cercle de centre* O *et de rayon* R est l'ensemble des points du plan dont la distance au centre est égale à R.



Les trois menteurs
Arthur, Benoît et Claude habitent trois maisons de la même rue.
Nos trois amis sont un peu menteurs : ils ne disent la vérité qu'une fois sur deux.



Arthur dit : « Entre ma maison et celle de Benoît, il y a 2 km. » Puis, « Entre la maison de Benoît et la mienne, il y a 3 km. »
Benoît dit : « Pour aller et revenir de chez Claude, j'ai 6 km de trajet », puis « Ma maison est à la même distance de celle d'Arthur et de celle de Claude. »
Claude dit : « Benoît habite à plus de 4 km d'Arthur », puis « Parmi nos trois maisons, les plus éloignées le sont de 5 km. »
Rétablir la vérité

9. 12 Distance d'un point à une droite

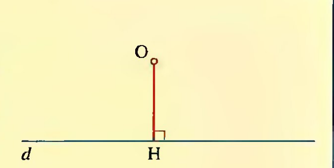
O est un point. *d* est une droite.
La distance du point O à la droite *d* est par définition *la plus courte* des distances de O à un point de *d*.
Si H est le pied de la perpendiculaire à *d* issue de O, alors la distance de O à *d* est justement OH.

O
d H

Notion intuitive : aller au plus court d'un point à une droite, c'est y aller **perpendiculairement**.

9. 13 Distance et alignement

A, B et C sont trois points.
Si AB + BC = AC, alors A, B et C sont alignés et plus précisément B appartient au segment [AC].
Et pour trois points quelconques A, B′, C, on a toujours :
AB′ + B′C ⩾ AC.
C'est l'*inégalité triangulaire*.

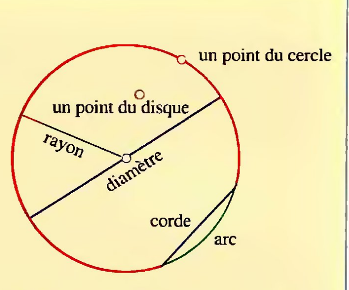


Notion intuitive : aller au plus court d'un point à un point, c'est y aller suivant la **ligne droite**.

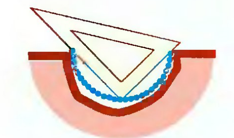
9. 14 Cercle, disque et segment

Pour contempler un cercle et tous ses "attributs" regarder la figure ci-contre.

Notez qu'un disque est une surface et un cercle est une ligne (que l'on appelle parfois "circonférence").

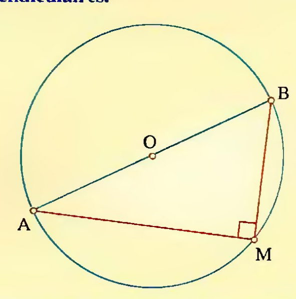


Le théorème de l'équerre
Si une équerre est en équilibre sur les bords d'un trou, alors son sommet décrit un demi-cercle ! Étonnant, non ?



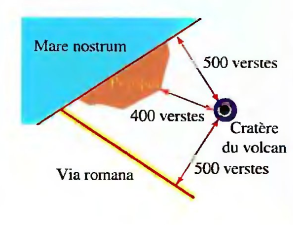
9. 15 Le théorème de l'équerre

Si M est un point du cercle de diamètre [AB], alors les droites (MA) et (MB) sont perpendiculaires.



Tangente
***Tangente** vient du latin **tangere** (toucher) : une tangente ne "coupe" pas un cercle, elle ne fait que le "toucher".*

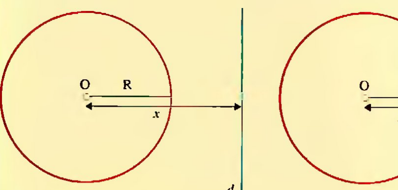
Pompéi
La ville de Pompéi fut engloutie après trois éruptions successives du Vésuve qui s'étendirent successivement sur 400 verstes, 500 verstes et 700 verstes autour du volcan.
■ ***Décrire la situation vue de la Via Romana.***

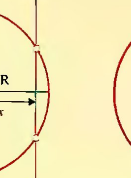


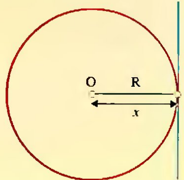
9. 16 Cercle et droite

Protagonistes : un cercle avec son centre O et son rayon R : une droite d, située à une distance x du point O.

Premier cas : $x > R$	Deuxième cas : $x < R$	Troisième cas : $x = R$
La droite et le cercle n'ont aucun point commun, ils sont **disjoints**.	La droite et le cercle ont deux points communs, ils sont **sécants**.	La droite et le cercle ont un unique point commun, ils sont **tangents**.



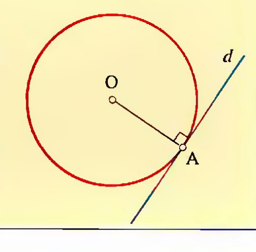




9. 17 Tangente à un cercle

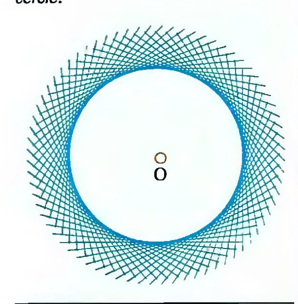
Si une droite d est tangente en A à un cercle de centre O, alors la droite d est perpendiculaire au rayon [OA].

Réciproquement, si une droite d est perpendiculaire au rayon d'un cercle en son extrémité, alors elle est tangente au cercle.



Des droites équidistantes d'un point donné

*O est un point. R est un nombre positif. L'ensemble des droites situées à la (même) distance R du point O est l'ensemble des **droites tangentes** au cercle de centre O et de rayon R.*
*On dit que les droites **enveloppent** le cercle.*



Agent double

*Attention au préfixe "équi". C'est un agent double. Il vient du latin, mais peut provenir de l'adjectif **aequus** qui signifie **égal** (comme ici dans équidistance) ou du nom **equus** qui veut dire **cheval** (comme dans équitation).*

Construction du milieu d'un segment

Au "pifomètre"

Une méthode qui peut donner de bons résultats.

En mesurant et en divisant par 2

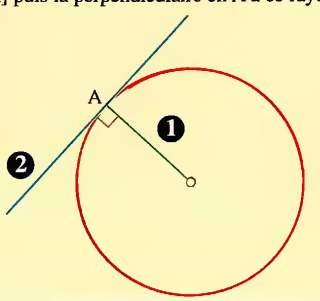
Excellent pour le calcul mental.

Au compas

Simple et précis.
Effectuer dans l'ordre les tracés 1, 2, 3 et 4.

Construction de la tangente au cercle

Tracer un rayon [OA] puis la perpendiculaire en A à ce rayon (voir page 90).



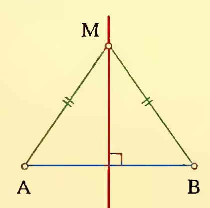
ÉQUIDISTANCE

9. 18 Points équidistants de deux points donnés

A et B sont deux points donnés.

L'ensemble des points situés à égale distance de A et B est la droite perpendiculaire à (AB) passant par le milieu de [AB].

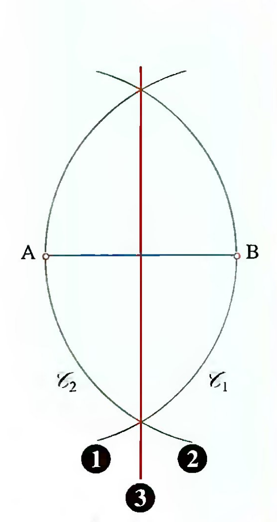
On l'appelle la médiatrice du segment [AB].



Comment construire une médiatrice ?

Donnée : un segment [AB].
À tracer : sa médiatrice.
Instrument : le compas.

1. Tracer le cercle $\mathscr{C}_1$ de centre A et de rayon [AB].
2. Tracer le cercle $\mathscr{C}_2$ de centre B et de rayon [AB].
3. La médiatrice de [AB] est la droite qui passe par les deux points d'intersection de $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.
(Illustration en marge.)



Les cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ ont même rayon.

Médiatrice *vient du latin* ***medium*** *(milieu).*
Bissectrice *vient du latin* ***bi*** *(deux) et* ***sector*** *(qui coupe).*
Une bissectrice "coupe un angle en deux angles égaux".

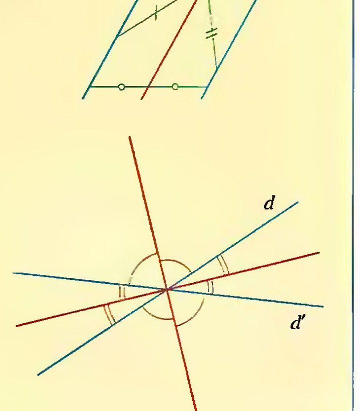
9. 19 Points équidistants de deux droites données

d et *d'* sont deux droites données.

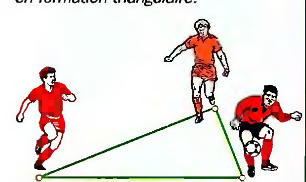
Premier cas

Les droites *d* et *d'* sont parallèles.

L'ensemble des points équidistants de *d* et de *d'* est une droite parallèle à *d* et *d'* qui passe par le milieu de tous les segments joignant un point de *d* et un point de *d'*.



Football
Trois attaquants arrivent, menaçants, en formation triangulaire.



■ ***Où doit-on se mettre, en défense, pour être à la même distance de chacun d'eux ?***

Second cas

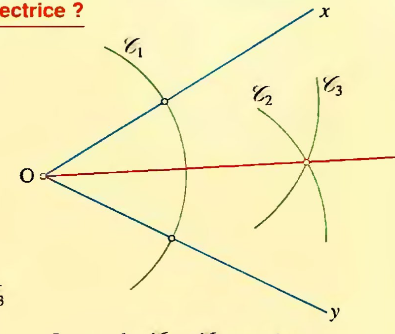
Les droites *d* et *d'* ne sont pas parallèles.

L'ensemble des points situés à égale distance des droites *d* et *d'* est composé de deux droites. Ce sont les bissectrices des angles formés par *d* et *d'*.

Comment construire une bissectrice ?

Donnée : un angle $\widehat{xOy}$.
À tracer : sa bissectrice.
Instrument : le compas.

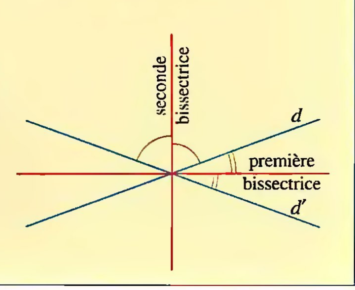
Tracer un cercle $\mathcal{C}_1$ de centre O qui coupe les côtés de l'angle en deux points. Par ces deux points, on trace deux cercles $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ de même rayon.
La droite qui passe par O et par les points d'intersection de $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ est la bissectrice intérieure de $\widehat{xOy}$.



Les cercles $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ ont même rayon.

9. 20 Paire de bissectrices

Un couple de droites déterminent "deux angles".
Les bissectrices de chacun de ces angles sont perpendiculaires.



"Construire" dans un texte d'exercice mathématique signifie :
- *chercher et décrire la construction à réaliser (pour cela on a intérêt à tracer une figure supposant la construction réalisée) ;*
- *prouver que cette construction donne la solution du problème cherché ;*
- *regarder s'il n'existe pas d'autres solutions ;*
- *examiner, s'il y a lieu, différents cas de figure.*

9. 21 Problèmes de construction

Construction 1

d et *d'* sont 2 droites sécantes. M est un point n'appartenant à aucune de ces 2 droites.
Construire un point A *sur d et un point* B *sur d' tel que* M *soit le milieu de* [AB].

La parallèle à *d* par M coupe *d'* en N. La parallèle à *d'* par M coupe *d* en P. Les points A et B sont les symétriques du point d'intersection de *d* et *d'*, respectivement par rapport à N et P.

Construction 2

d, *d'* et Δ sont 3 droites sécantes (non concourantes). *Construire un point* A *sur d et un point* B *sur d' tel que* Δ *soit la médiatrice de* [AB].

La symétrique d_1 de *d* par rapport à Δ coupe *d'* en B.

Construction 3

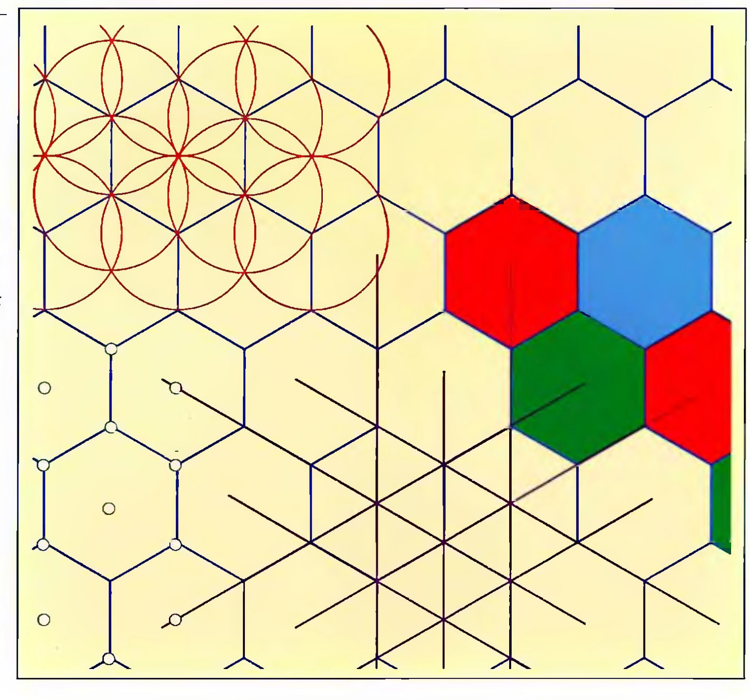
A et B sont 2 points.
R est un nombre positif donné.
Construire un cercle de rayon R *passant par* A *et* B.

Les cercles de centres A et B et de rayon R se coupent en C_1 et C_2. Le cercle de centre C_1 (ou C_2) de rayon R passe par A et B.

Construction 4

A est un point. *d* est une droite.
R est un nombre positif.
Construire un cercle de rayon R *passant par* A *et tangent à d.*

Le centre du cercle cherché est à l'intersection du cercle de centre A de rayon R et de la droite parallèle à *d* à la distance R de *d*.

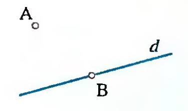


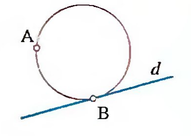
En construisant un cercle, puis un second centré sur le premier et passant par le premier centre... puis d'autres et encore d'autres, chacun centré sur un point d'intersection de cercles précédents et passant par un centre précédent, on obtient un réseau "hexagonal".
En joignant par des droites les centres de tous ces cercles, on obtient un réseau dans trois directions, appelé parfois un ***trillage*** *; les mailles de ce réseau forment un système de triangles équilatéraux pavant le plan.*

LE DÉFI

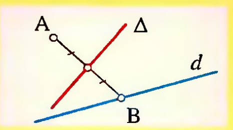
Données : une droite d. Un point A n'appartenant pas à d. Un point B appartenant à d.

Le défi : construire un cercle passant par A et tangent en B à la droite d.

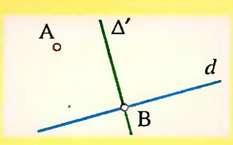




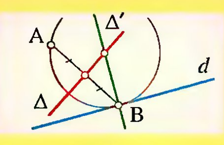
Contraintes géométriques : comment elles servent à résoudre les problèmes



Première contrainte : le cercle doit passer par A et B. Son centre doit être à égale distance de A et de B.
Son centre doit donc être sur la médiatrice Δ de [AB].



Deuxième contrainte : le cercle doit être tangent en B à la droite *d*.
Son rayon [OB] doit être perpendiculaire à *d*.
O est donc situé sur la droite Δ′ perpendiculaire à *d* passant par B.





Δ et Δ′ se coupent forcément. En effet, si Δ et Δ′ étaient parallèles, alors (AB) et *d* seraient elles-mêmes parallèles, et A appartiendrait à la droite *d*.
Le point d'intersection O de Δ et Δ′ est le centre du cercle cherché. Le cercle demandé est le cercle qui a pour centre O et passe par A (et donc par B).

Dans cette situation, on a utilisé successivement
- *la définition de la médiatrice ;*
- *une propriété des tangentes à un cercle ;*
- *les propriétés reliant parallèles et perpendiculaires et en prime un raisonnement par l'absurde.*

NOTRE MONDE EST-IL EUCLIDIEN ?

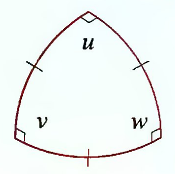
La géométrie d'Euclide est celle qui semble le mieux traduire les propriétés que nous constatons autour de nous. Mais dans d'autres mondes, peut-être pas si éloignés de nous, la géométrie pourrait être non-euclidienne…

À la manière de Saint-Ex

Dans ce pastiche du "Petit Prince" de Saint-Exupéry, la propriété suivante est si incontestable qu'elle est prise pour base des raisonnements :
Si deux droites b et a sont perpendiculaires (en B et A) à une même droite, alors ces deux droites se coupent en un point C équidistant de B et A.
Exactement BC = AC = 25 pas.

Théorème du petit prince

À partir de cette propriété, pouvez-vous écrire un raisonnement qui démontre ceci :
Si un triangle a 3 angles droits, alors il est équilatéral.



La géométrie du petit prince

Antoine avait été invité à goûter sur la planète du petit prince et ils discutaient de géométrie.

— Chez moi, disait le petit prince, je peux toujours aller d'une fleur à une autre par un chemin plus court que tous les autres ; ce chemin s'appelle une « dorate » ou plutôt un « segment de dorate » car j'ai une « raiguèle » qui me permet de prolonger les segments de dorate aussi loin que je veux.

— C'est pareil chez moi, répondit Antoine, qui trouvait que le petit prince avait un léger défaut de prononciation. Mais, puisque tu parles de distance, dis-moi quelle est l'unité que tu utilises.

— « Le pas », dit le petit prince, c'est ce qu'il y a de plus naturel ! Et justement le plus long tour que je puisse faire sur ma planète mesure exactement 100 pas. À partir de trois fleurs je dessine des triangles et je peux ainsi mesurer leurs trois côtés : il y en a qui sont « isocèles », d'autres « équilatéraux » (ceux-là ont leurs 3 côtés de même longueur).

— C'est vraiment comme chez moi ! continue Antoine, et tu dois aussi avoir des triangles « rectangles » lorsque deux côtés sont « perpendiculaires ».

— Bien sûr ! assura le petit prince, je me sers du bord des livres comme équerre. Regarde la figure que je trace à partir des fleurs A et B. Par B je trace la perpendiculaire à la dorate (AB), je l'appelle « *b* ». Et par A je trace aussi la perpendiculaire à la dorate (AB), je l'appelle « *a* ». Que crois-tu qu'il arrive aux dorates *a* et *b* ?

— Chez moi elles ne se rencontrent pas, on dit qu'elles sont « parallèles ».

— Eh bien chez moi, sur l'astéroïde B612, elles se rencontrent en deux points ; et j'ai remarqué une chose très curieuse : si C est l'un des points de rencontre alors la distance entre B et C est exactement de 25 pas ! et la distance entre A et C aussi !

— Ah ça, c'est un peu fort s'exclama Antoine, mais comment peux-tu raisonner avec une géométrie aussi extravagante ?

UN CONTE DE PERRAULT PEU CONNU

Tout le monde connaît les contes du petit Chaperon rouge, du Chat botté, du petit Poucet, de Cendrillon. C'est Charles Perrault qui les réunit sous le nom de "Contes de ma mère l'Oye" en 1697. Dans ce "livre de contes" on trouve aussi un poème mathématique plutôt curieux.

Les amours de la règle et du compas

…
Son frère le Compas fut pourvu seulement
De jambes et de tête, et marcha justement,
Tournant de tous côtés par ordre et par mesure,
Et toujours de ses pas traçant quelque figure.
…
Le Soleil, connaissant son artiste nature,
Et prévoyant l'éclat de sa race future,
Par un songe lui dit : Lève-toi de ce lieu
Tu seras digne époux de la fille d'un Dieu.
(Souvent contre l'espoir les Déités prospères
Font naître le bonheur du fond de nos misères).
Le Compas glorieux se réveille en sursaut,
Ému de cette vue et d'un espoir si haut.
Il rend grâce au Soleil, et ferme comme un Aigle
Le regarde et s'en va : Puis rencontre la Règle ;
Droite, d'un grave port, pleine de majesté,
Inflexible et surtout observant l'équité
Il la suit, elle fuit d'une égale vitesse
Il double en son ardeur ses efforts vainement
Tous les cœurs s'opposaient à son contentement
Il pense la tenir, sans la voir il la touche
De ses rayons aigus il joint cette farouche
Quoi ? dit-elle en riant, je serais la conquête
D'un amant qui n'aurait que les pieds et la tête ?
Toutefois nos amours, répliqua le Compas,
Produiront des enfants qui vaincront le trépas.
De nous deux sortira la belle Architecture,
Et mille nobles arts pour polir la nature,
Ne pense pas, dit-elle, ébranler mon repos,
Ou pour autoriser tes étranges propos
Tâche à plaire à mes yeux par quelques gentillesses ;
Et montre des effets pareils à tes promesses.
Le Compas aussitôt sur un pied se dressa,
Et de l'autre, en tournant un grand cercle traça
La règle en fut ravie, et soudain se vint mettre
Dans le milieu du cercle, et fit le diamètre.
Son amant l'embrassa, l'ayant à sa merci,
Tantôt s'élargissant et tantôt raccourci,
Et l'on vit naître alors de leurs doctes postures
Triangles et carrés, et mille autres figures.

Charles Perrault

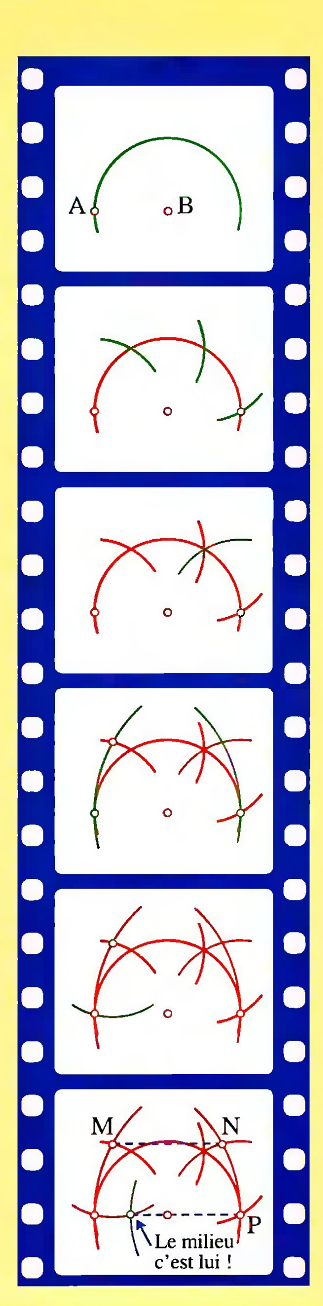
Sans règle
Avec le compas, (qui *toujours de ses pas trace quelque figure*), saurez-vous marquer le point diamétralement opposé à un point A sur un cercle ?
Et le point symétrique de A par rapport à un autre point B ?
Et le milieu de [AB] ?

LES CAMPAGNES DE BONAPARTE

De ses conquêtes en Italie, le général Bonaparte rapporta en 1798 un livre de l'abbé Mascheroni, qui le lui avait dédicacé.
Cet abbé mathématicien avait réussi à montrer une chose surprenante :
Tout point d'une figure pouvant être construit avec une règle et un compas, peut se construire avec le compas seul !

La géométrie du compas

Voici le film de la construction du milieu de [AB] n'utilisant que le compas seul.
Elle nécessite le tracé de 9 arcs de cercles et le report d'une longueur.





Portrait du général Bonaparte (1896) *par Louis Lafitte*

Le milieu I de [AB] est à l'intersection du cercle de centre M passant par A et du cercle de centre P de rayon NM.

Justification
Pour démontrer que les constructions représentées ci-contre aboutissent effectivement à marquer le milieu du segment [AB], il suffit de suivre les jeux de la symétrie : (MA) et (NP) sont symétriques par rapport à l'axe de la figure et (MI) est donc parallèle à (NP)...

Test 9

Pour chacune des 10 questions, indiquer la ou les bonnes réponses parmi A, B, C, D ou E

	Questions	A	B	C	D	E
1	Par quels triplets de signes peut-on remplacer … ? Si d_1 … d_2 et d_1 … d_3 alors d_2 … d_3.	// ⊥ //	⊥ ⊥ //	⊥ ⊥ ⊥	// // //	// ⊥ ⊥
2	Par quels triplets de signes peut-on remplacer … ? Si d_1 … d_2 et d_2 … d_3 alors d_1 … d_3.	// // //	⊥ ⊥ //	// ⊥ //	⊥ // ⊥	⊥ ⊥ ⊥
3	Si AB = 3, BC = 4, AC = 1, alors…	A est un point de [BC]	B est un point de [AC]	C est un point de [BA]	A, B, C sont alignés	A n'est pas sur la droite (BC)
4	Si AB = 2 et BC = 2, alors…	B est milieu de [AC]	A et C sont sur un cercle de centre B	B est sur la médiatrice de [AC]	A, B, C sont alignés	AC = 2
5	Si AB = BC = AC, alors…	B est milieu de [AC]	C est sur la médiatrice de [AB]	A, B, C sont cocycliques	A, B, C sont sur un cercle de rayon 3	ABC est un triangle équilatéral
6	Si AB = 1, BC = 2, AC = 4, alors…	B est milieu de [AC]	A est milieu de [BC]	C est milieu de [AB]	A, B, C sont alignés	situation impossible
7	Deux cercles n'ayant aucun point commun…	n'ont pas forcément des tangentes communes	ont toujours deux tangentes communes	ont toujours trois tangentes communes	ont toujours quatre tangentes communes	n'ont jamais aucune tangente commune
8	Si A et B sont deux points d'un cercle de rayon 4, alors sûrement…	AB ⩾ 1	AB ⩽ 4	AB ⩽ 8	AB = 4	AB = 8
9	Combien y-a-t-il de points à 4 cm de deux droites sécantes données ?	0	1	2	4	une infinité
10	Dans quels cas a-t-on A, B et C alignés ?	AB = 3 cm AC = 6 cm BC = 6 cm	AB = 3 cm AC = 6 cm BC = 3 cm	AB = 2 cm AC = 5 cm BC = 10 cm	AB = 2 cm AC = 5 cm BC = 7 cm	AB = 5 cm AC = 5 cm BC = 5 cm

THÈME 10

Le grand secret

« On dit que les gens qui ont divulgué les nombres irrationnels ont péri dans un naufrage jusqu'au dernier, car l'inexprimable, l'informe, doit être absolument tenu secret : ceux qui l'ont divulgué et ont touché à cette image de la vie ont instantanément péri et doivent rester éternellement ballotés par les vagues. »

Proclus *(historien latin)*

Les théorèmes de Pythagore et de Thalès

Aujourd'hui, c'est plutôt l'ignorance des rapports entre les nombres et les figures géométriques qui risque d'être gênante. Aux deux grands théorèmes qui régissent ces rapports, on a donné le nom de deux grands mathématiciens de l'Antiquité : **Thalès** qui vivait en Asie Mineure aux alentours de 600 av. J.-C; et **Pythagore** qui, depuis l'île de Samos, rayonnait sur toute la Méditerranée (env. 570-500 av. J.-C.).

Le théorème de Pythagore

C'est le plus connu et certainement le plus vieux "théorème" du monde. Il est utile aux jardiniers comme aux architectes et aux artistes comme aux bricoleurs.
Mais comment le "démontre"-t-on ?

Le théorème de Thalès

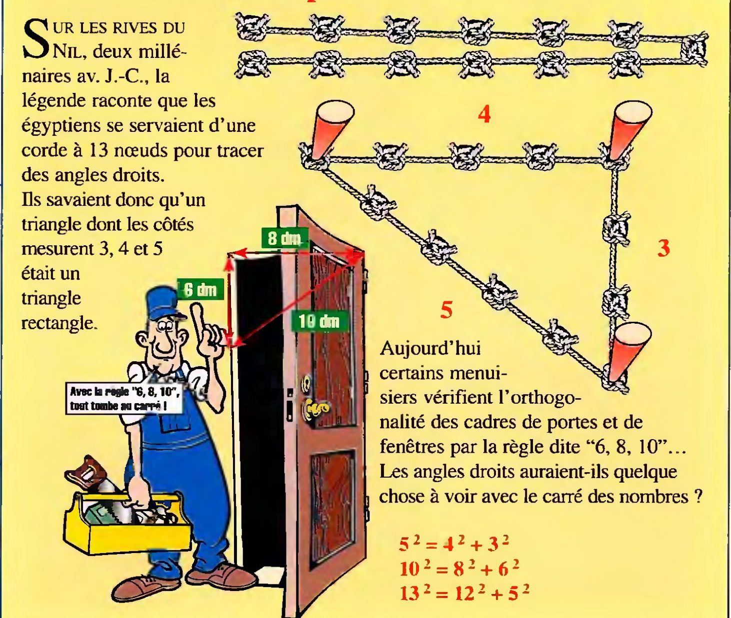
Le 14 juillet de l'an 576 av. J.-C., un dénommé Thalès, en provenance de Milet et en visite à la bibliothèque d'Alexandrie entreprit de mesurer la grande pyramide de Chéops.
En tous cas, c'est ce que dit la légende...

Agrandissement et réduction

De Barbe-Bleue aux Jivaros, les changements d'échelle ont toujours fait peur. Pour tout savoir sur les pièges à éviter, apprenez les propriétés de ces transformations.

L'un des savoirs les plus vieux du monde

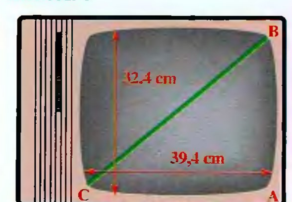
Sur les rives du Nil, deux millénaires av. J.-C., la légende raconte que les égyptiens se servaient d'une corde à 13 nœuds pour tracer des angles droits.
Ils savaient donc qu'un triangle dont les côtés mesurent 3, 4 et 5 était un triangle rectangle.



Aujourd'hui certains menuisiers vérifient l'orthogonalité des cadres de portes et de fenêtres par la règle dite "6, 8, 10"... Les angles droits auraient-ils quelque chose à voir avec le carré des nombres ?

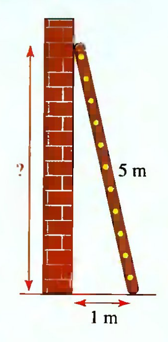
$5^2 = 4^2 + 3^2$
$10^2 = 8^2 + 6^2$
$13^2 = 12^2 + 5^2$

■ **Combien vaut la diagonale de ce téléviseur ?**



Si BC ^{2} = AB ^{2} + AC ^{2} *alors* BC = $\sqrt{AB^2 + AC^2}$.
Ici, il faut donc calculer $\sqrt{32,4 \times 32,4 + 39,4 \times 39,4}$.

Une échelle de 5 m de haut est écartée du mur de 1 m.
■ ***Quelle hauteur atteint-elle ?***



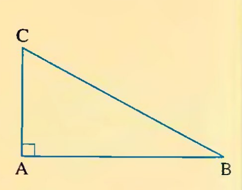
Phrases réciproques
En mathématiques, beaucoup de phrases expriment un lien cause-conséquence entre deux propriétés. Elles sont de la forme "S'il pleut, alors je prends mon parapluie".
À partir d'une telle phrase, on peut fabriquer une nouvelle phrase en échangeant la principale et la subordonnée : "Si je prends mon parapluie alors il pleut."
Cette phrase est la réciproque de la première. Attention, l'une de ces phrases peut être vraie sans que l'autre le soit.

LE THÉOREME DE PYTHAGORE

10. 1 Le théorème de Pythagore

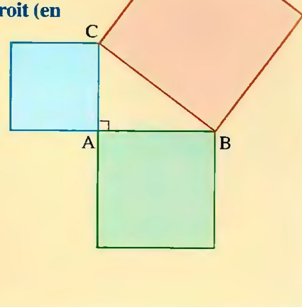
Si un triangle ABC est rectangle en A alors BC ^{2} = AB ^{2} + AC ^{2}.

En français : "Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés".

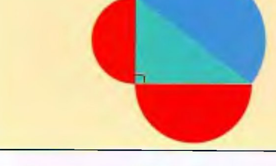


10. 2 Interprétation du théorème de Pythagore

L'aire du carré construit sur l'hypoténuse (en rouge) est la somme des aires des deux autres carrés construits sur les côtés de l'angle droit (en vert et bleu).



L'aire du demi-disque construit sur l'hypoténuse est aussi la somme des aires des demi-disques construits sur les côtés de l'angle droit !

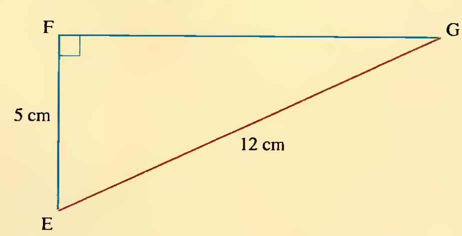


10. 3 Comment utiliser le théorème de Pythagore

Ce théorème sert à calculer la mesure d'un côté d'un triangle rectangle quand on connaît les mesures des deux autres côtés.

EXEMPLE

Données : EFG est un triangle rectangle en F, avec EF = 5 cm, EG = 12 cm.
Calculer FG.



Démonstration. Si EFG est rectangle en F, alors d'après l'énoncé de Pythagore :

$$EG^2 = EF^2 + FG^2.$$

Donc $FG^2 = EG^2 - EF^2$.

$FG^2 = 12^2 - 5^2 = 144 - 25 = 119$.

$FG = \sqrt{119}$ cm $\approx 10,9$ cm.

10. 4 Réciproque du théorème de Pythagore

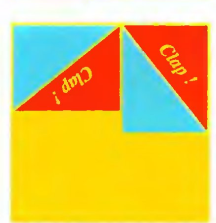
Si BC ^{2} = AB ^{2} + AC ^{2}, alors le triangle ABC est rectangle en A.

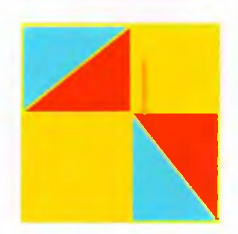
Clip-clap

Dans un carré donné, on peut s'amuser à déplacer 4 triangles rectangles superposables : la surface non occupée (ici coloriée en jaune) garde toujours la même valeur. Au début de la manœuvre, cette surface est le carré de "l'hypoténuse" et à la fin, ce sont les deux carrés des côtés "de l'angle droit".









La propriété 10. 6 a quelque chose de merveilleux : c'est en effet grâce à elle qu'Euclide démontre pour la première fois dans ses Éléments, les théorèmes de Pythagore et de Thalès !
Ces démonstrations sont résumées par des films aux pages 112 et 115 de ce chapitre. Elles valent le détour.

10. 5 Comment démontrer le théorème de Pythagore ?

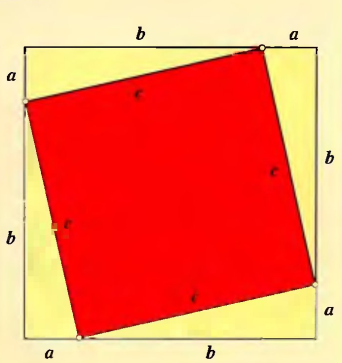
La plupart des démonstrations du théorème de Pythagore se présentent sous forme de *puzzle géométrique* : ce puzzle montre comment il est possible de découper une certaine figure pour en reconstituer une autre avec les mêmes morceaux ; la figure initiale et la figure reconstituée ont alors la même aire !
La page 110 montre quelques-uns de ces puzzles.

L'une des démonstrations les plus simples se fait à partir de la figure ci-contre.
Le grand carré de côté $a + b$ a une aire égale à $(a + b)^2$.
Mais cette aire est aussi celle du carré central, de côté c, et des quatre triangles rectangles, d'aire $\frac{ab}{2}$.

On a donc $(a + b)^2 = c^2 + 4 \times \frac{ab}{2}$

$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab$

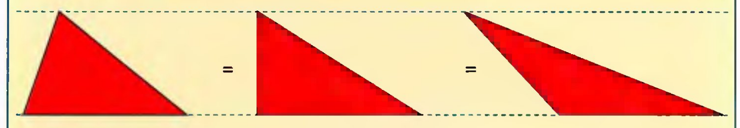
D'où : $a^2 + b^2 = c^2$.



D'autres démonstrations du théorème de Pythagore sont données pages 111, 112 et 113. Elles s'appuient sur les deux propriétés rappelées au paragraphe suivant et qui étaient bien connues des mathématiciens grecs.

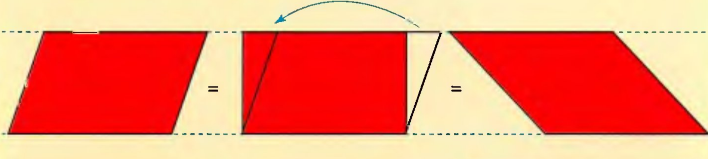
10. 6 Aire d'un triangle

L'aire d'un triangle ne change pas lorsqu'on déplace un sommet parallèlement au côté opposé.

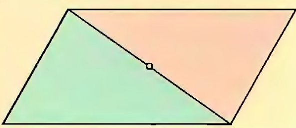


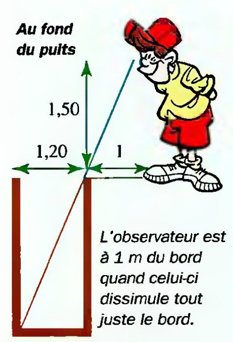
10. 7 Aire d'un parallélogramme

L'aire d'un parallélogramme ne change pas lorsqu'on déplace un côté parallèlement à celui qui lui est opposé.



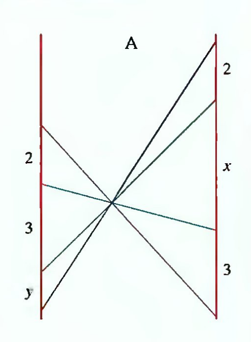
Un parallélogramme n'est pas autre chose que le double d'un triangle (précisément les deux triangles déterminés par une diagonale sont symétriques par rapport au centre du parallélogramme). Donc…

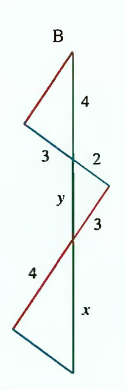




■ ***Quelle est la profondeur du puits ?***

Application du théorème de Thalès
Dans chacune des figures ci-dessous les droites de même couleur sont parallèles.
■ ***Peut-on calculer x et y dans la figure A ? Et dans la figure B ?***
(et si oui… le faire.)

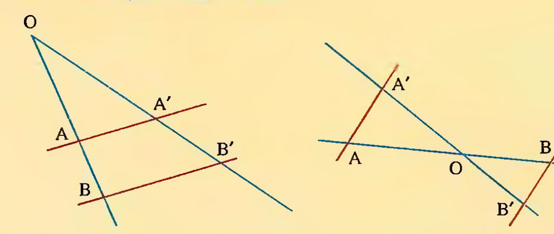




■ LE THÉORÈME DE THALÈS

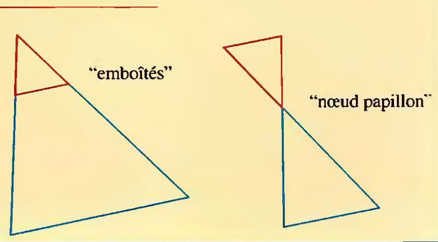
10. 8 Le théorème de Thalès dans le triangle

Si O, A, B sont alignés, si O, A′, B′ sont alignés et si (AA′) est parallèle à (BB′) alors $\frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'} = \frac{AA'}{BB'}$.



10. 9 Interprétation du théorème de Thalès

Ce théorème exprime la proportionnalité entre les mesures des côtés de deux triangles placés l'un par rapport à l'autre dans une situation bien précise qu'on appelle parfois “situation de Thalès” et que résument les deux dessins ci-contre.

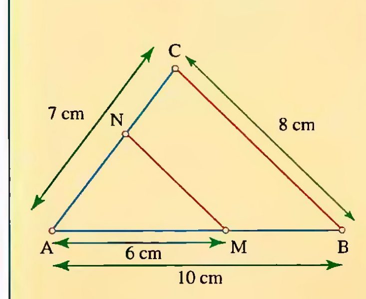


10.10 Un exercice-type : utilisation du théorème de Thalès

EXEMPLE : ABC est un triangle avec AB = 10 cm, BC = 8 cm, AC = 7 cm.

M est le point du segment [AB] tel que AM = 6 cm. N est le point du segment [AC] tel que (MN) // (BC).

Calculer les longueurs AN et MN.



Démonstration.

A, B et M sont alignés. A. C et N sont alignés. Les droites (MN) et (BC) sont parallèles. On peut donc appliquer le théorème de Thalès et écrire

$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$.

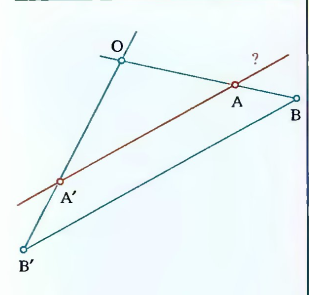
La première égalité permet le calcul de AN :

$\frac{6}{10} = \frac{AN}{7}$, d'où 10 AN = 42

et AN = 42 ÷ 10 = 4,2 cm.

La deuxième égalité permet de calculer MN :

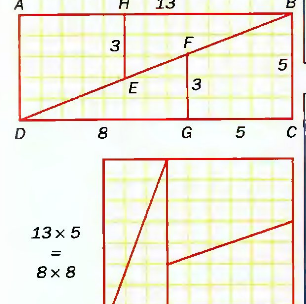
$\frac{6}{10} = \frac{MN}{8}$, d'où 10 MN = 48 et MN = 48 ÷ 10 = 4,8 cm.



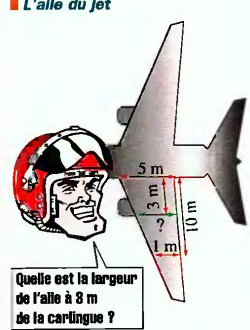
64 = 65

En découpant ce rectangle quadrillé comme indiqué, on peut facilement reconstituer un carré 8 × 8.

Mais si on est vraiment sûr que DG = 8, DC = 13 et BC = 5, quelle est la valeur exacte de FG ?



L'aile du jet



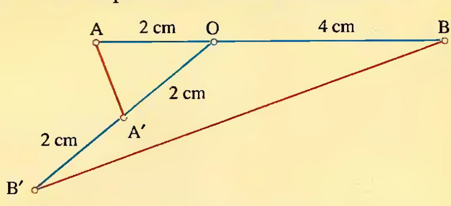
10.11 Réciproque du théorème de Thalès dans le triangle

Si O, A, B sont alignés dans cet ordre, si O, A′, B′ sont alignés dans cet ordre et si $\frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'}$ alors (AA′) est parallèle à (BB′)

Une seule égalité de rapports de longueurs permet d'établir le parallélisme des cotés (AA′) et (BB′).
La troisième égalité sera alors une conséquence obligée de ce parallélisme :

$$\frac{OA}{OB} = \frac{AA'}{BB'}.$$

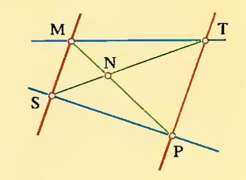
ATTENTION !
La condition sur l'ordre des points sert à éviter le cas ci-dessous.



OB = 2 OA et OB′ = 2OA′. On a bien $\frac{OB}{OA} = \frac{OB'}{OA'}$ mais (AA′) et (BB′) ne sont pas parallèles.

10.12 Utilisation de la réciproque du théorème de Thalès

Données : M, N et P sont alignés dans cet ordre, avec MN = 5 cm et NP = 12 cm.
S, N et T sont alignés dans cet ordre avec SN = 7,5 cm et NT = 18 cm.
Les droites (MS) et (PT) sont-elles parallèles ?
Les droites (MT) et (SP) sont elles parallèles ?



Parallélisme de (MS) *et* (PT).

Calculons d'une part $\frac{NM}{NP} = \frac{5}{12}$

et d'autre part $\frac{NS}{NT} = \frac{7,5}{18} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$.

Comme $\frac{NM}{NP} = \frac{NS}{NT}$, d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (MS) et (PT) sont parallèles.

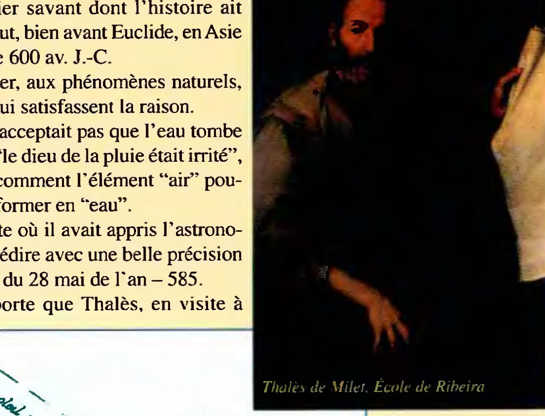
Parallélisme de (MT) *et* (SP).

Calculons d'une part $\frac{NM}{NP} = \frac{5}{12} = 0,416\ldots$

et d'autre part $\frac{NT}{NS} = \frac{18}{7,5} = 2,4$.

Comme $\frac{NM}{NP} \neq \frac{NT}{NS}$, les droites (MT) et (PS) ne sont pas parallèles.

10.13 La légende de Thalès


Thalès de Milet. École de Ribeira

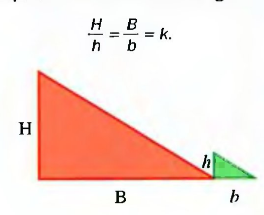
THALÈS, le premier savant dont l'histoire ait retenu le nom, vécut, bien avant Euclide, en Asie Mineure autour de 600 av. J.-C.
Il essaya de trouver, aux phénomènes naturels, des explications qui satisfassent la raison.
Par exemple, il n'acceptait pas que l'eau tombe du ciel parce que "le dieu de la pluie était irrité", mais il cherchait comment l'élément "air" pouvait ainsi se transformer en "eau".
De retour d'Égypte où il avait appris l'astronomie, il réussit à prédire avec une belle précision l'éclipse du soleil du 28 mai de l'an – 585.
La tradition rapporte que Thalès, en visite à Alexandrie, réussit à mesurer la hauteur de la grande pyramide (qui avait déjà un millénaire et demi).





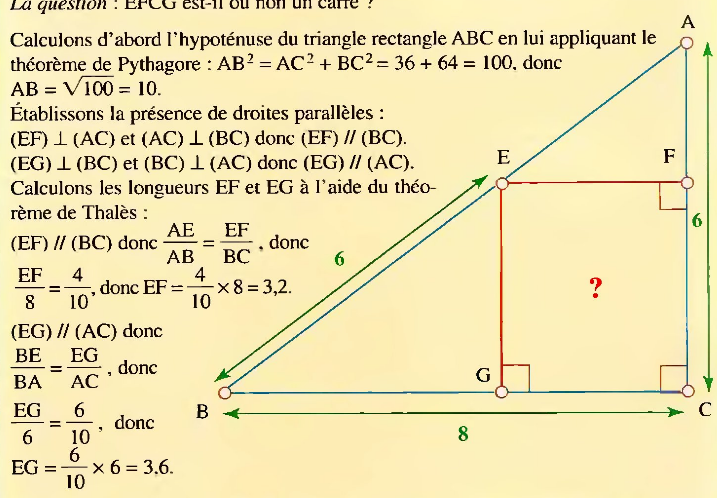
Thalès et la proportionnalité
Aujourd'hui, plus généralement on dit : Si deux triangles ont leurs côtés parallèles, alors il y a une relation de proportionnalité entre leurs longueurs.

$$\frac{H}{h} = \frac{B}{b} = k.$$



10.14 Exemple type : à la recherche d'un carré

Données : un triangle ABC rectangle en C tel que AC = 6 cm et BC = 8 cm. Un point E sur l'hypoténuse de ce triangle à 6 cm de B. F et G sont les projetés orthogonaux de E respectivement sur (AC) et sur (BC).
La question : EFCG est-il ou non un carré ?



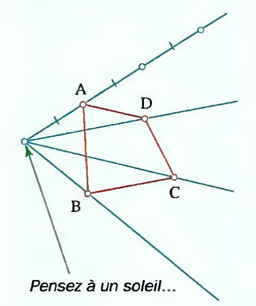
Calculons d'abord l'hypoténuse du triangle rectangle ABC en lui appliquant le théorème de Pythagore : $AB^2 = AC^2 + BC^2 = 36 + 64 = 100$, donc $AB = \sqrt{100} = 10$.
Établissons la présence de droites parallèles :
(EF) ⊥ (AC) et (AC) ⊥ (BC) donc (EF) // (BC).
(EG) ⊥ (BC) et (BC) ⊥ (AC) donc (EG) // (AC).
Calculons les longueurs EF et EG à l'aide du théorème de Thalès :
(EF) // (BC) donc $\frac{AE}{AB} = \frac{EF}{BC}$, donc
$\frac{EF}{8} = \frac{4}{10}$, donc $EF = \frac{4}{10} \times 8 = 3{,}2$.
(EG) // (AC) donc
$\frac{BE}{BA} = \frac{EG}{AC}$, donc
$\frac{EG}{6} = \frac{6}{10}$, donc
$EG = \frac{6}{10} \times 6 = 3{,}6$.

Conclusion : EFCG n'est pas un carré ; les côtés EF et EG n'ont pas la même mesure.

Dans cette situation, on a utilisé successivement :
- *le théorème de Pythagore pour calculer AB.*
- *Les propriétés reliant parallèles et perpendiculaires.*
- *Le théorème de Thalès pour calculer EF et EG.*
- *Et, bien sûr, une définition du carré.*

Tripler

Comment s'y prendre pour dessiner facilement un quadrilatère A'B'C'D' exactement semblable à ABCD, mais trois fois plus grand ?



AGRANDISSEMENT ET RÉDUCTION

10.15 Agrandir ou réduire

Si k est un nombre plus grand que 1, le polygone obtenu en multipliant toutes les longueurs des côtés d'un polygone P par k est un agrandissement de P (de coefficient k ou à l'échelle k).

aire 1

aire 4

agrandissement à l'échelle 2

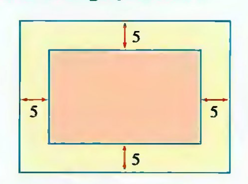
Si k est un nombre compris entre 0 et 1, le polygone obtenu en multipliant toutes les longueurs des côtés d'un polygone P par k est une réduction de P (de coefficient k ou à l'échelle k).

aire 1

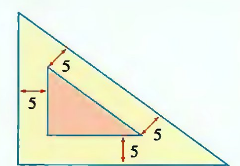
réduction à l'échelle 1/3

aire 1/9

En traçant à 5 cm à l'intérieur de tous les bords du rectangle un nouveau rectangle, obtient-on une réduction du rectangle précédent ?

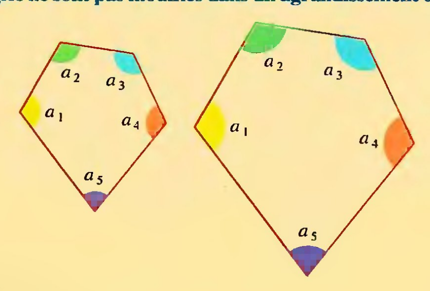


Et en faisant la même chose à 5 cm de tous les bords d'un triangle ?



10.16 Effet sur les angles

Les angles ne sont pas modifiés dans un agrandissement ou une réduction.

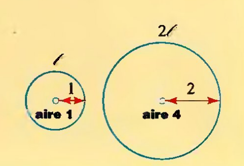


10.17 Effet sur un cercle

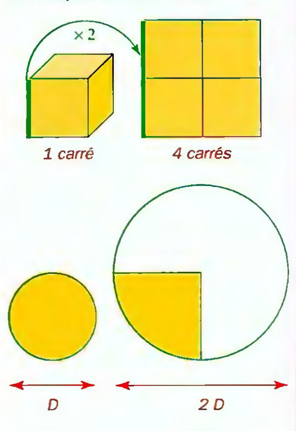
Après un agrandissement ou une réduction de coefficient k, un cercle de rayon R est transformé en un cercle de rayon kR

10.18 Effet sur un disque

Après un agrandissement ou une réduction de coefficient k, un disque de surface A est transformé en un disque de surface k^2A.



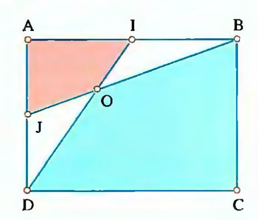
La multiplication des tartes



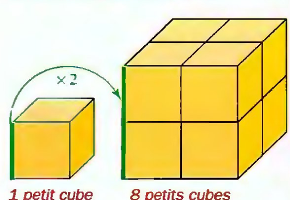
Rapport d'aires

ABCD est un rectangle. I est le milieu de [AD]. J est le milieu de [AB].

■ ***Quel est le rapport des aires des quadrilatères AIOJ et BCDO ?***



La multiplication des cubes



10.19 Effet sur les aires

Lorsque les longueurs sont multipliées par k, les aires sont multipliées par k^2.

EXEMPLES. *Un disque métallique de diamètre* 20 *cm pèse* 2,4 *kg. On en découpe un disque de diamètre* 10 *cm. Ce petit disque pèse :*

A 1,2 kg **B** 0,6 kg **C** 0,8 kg **D** 0,5 kg **E** 0,4 kg

(Vu au Concours Kangourou Cadets 95)

Attention au piège ! On divise le diamètre par 2, donc l'aire (et par suite la masse) est divisée par 4. La bonne réponse est donc C : 0,8 kg.

Dans un triangle équilatéral ABC, *on trace la droite* (IJ) *parallèle à* (BC) *de telle sorte que le triangle* AIJ *et le trapèze* BIJC *aient le même périmètre. L'aire du triangle* AIJ *est-elle alors égale, inférieure ou supérieure à celle du trapèze* BIJC *?*

Soit k le rapport de la réduction qui transforme ABC en AIJ.
Le périmètre de AIJ est égal à $3k$AB.
Le périmètre du trapèze BIJC est égal à
BI + IJ + JC + BC =
(AB – kAB) + kAB + (AB – kAB) + AB = 3AB – kAB.
On doit avoir $3k$AB = 3AB – k AB, soit $4k$AB = 3AB.
Le coefficient de la réduction est donc 3/4.
L'aire de AIJ est égale à 9/16 de celle de ABC. Celle du trapèze vaut donc 7/16 de celle de ABC.
L'aire de AIJ est donc supérieure à celle de BIJC.

10.20 Effet sur les volumes

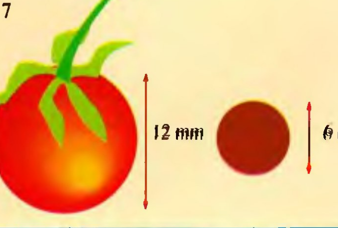
Lorsque les longueurs sont multipliées par k, les volumes sont multipliés par k^3.

EXEMPLE. *La Tour Eiffel a* 300 *m de hauteur ; et elle est entièrement construite en fer et pèse* 8 000 *tonnes.*
On veut construire un modèle réduit de la Tour, en fer aussi et pesant 1 *kg.*
Quelle doit être sa hauteur ?

Attention : diviser 300 m par 8 000 000 n'a aucun sens dans cette situation. En effet, les masses (donc les volumes) sont divisées par 8×10^6 quand on passe au modèle réduit.
Les longueurs sont donc être divisées par 2×10^2 = 200 dans le modèle réduit ($k^3 = 8 \times 10^6$ donc $k = 2 \times 10^2$).
La réponse est donc : 300/200 = 1,5 m.

EXEMPLE. *Une cerise a* 12 *mm de diamètre et son noyau,* 6 *mm.. Est-il vrai qu'il y a* 7 *fois plus de chair que de noyau ?*

La cerise a un diamètre double de celui du noyau. Son volume est donc 2 × 2 × 2 fois plus grand : 8 fois (chair + noyau).
La chair vaut donc effectivement 7 fois le noyau !



Dans l'article "Géométrie" de la Grande Encyclopédie (deuxième moitié du XVIIIe siècle) D'Alembert rapporte quelques anecdotes sur Pythagore et certains de ses comparses…

Le texte donné ici est extrait de l'édition "méthodique par ordre de matières" parue sous la Révolution.

*GÉOMÉTRIE, est la science des propriétés de l'étendue, en tant qu'on la considère comme simplement étendue & figurée. Ce mot est formé de deux mots grecs, **geo**, terre, & **metron**, mesure ; & cette étymologie semble nous indiquer ce qui a donné naissance à la Géométrie : imparfaite & obscure dans son origine comme toutes les autres sciences, elle a commencé par une espèce de tâtonnement, par des mesures & des opérations grossières, & s'est élevée peu-à-peu à ce degré d'exactitude & de sublimité où nous la voyons.*

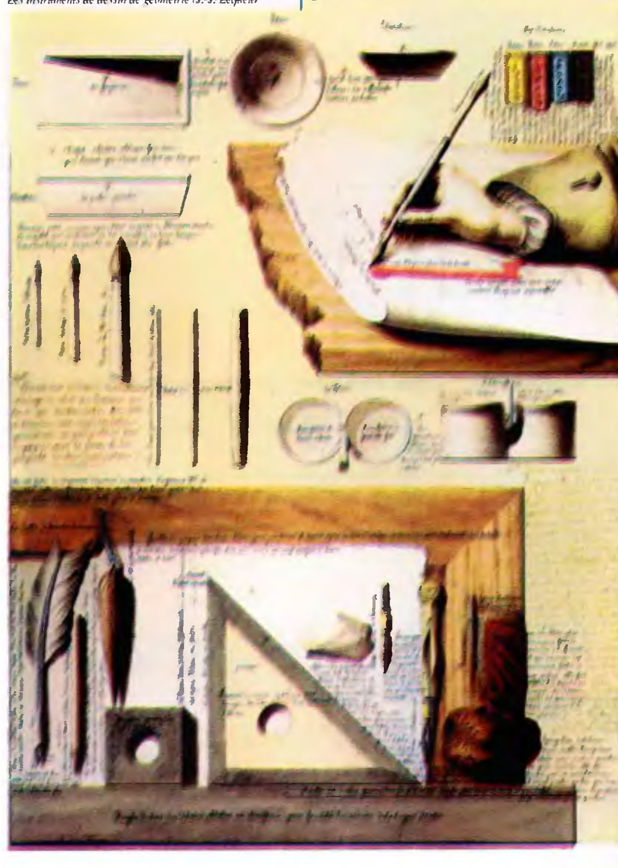
10.21 Histoire abrégée de la géométrie avant J.-C.

Il y a apparence que la Géométrie, comme la plupart des autres sciences, est née en Égypte, qui paroît avoir été le berceau des connoissances humaines, ou pour parler plus exactement, qui est de tous les pays que nous connoissons, celui où les Sciences paroissent avoir été le plus anciennement cultivées. Selon Hérotote & Strabon, les Égyptiens ne pouvant reconnoître les bornes de leurs héritages confondues par les inondations du Nil, inventèrent l'art de mesurer & de diviser les terres, afin de distinguer les leurs par la considération de la figure qu'elles avoient, & de la surface qu'elles pouvoient contenir. Telle fut, dit-on, la première aurore de la Géométrie. Joseph, historien zélé pour sa nation, en attribue l'invention aux Hébreux ; d'autres à Mercure. Que ces faits soient vrais ou non, il paroît certain que, quand les hommes ont commencé à posséder des terres, & à vivre sous des loix différentes, ils n'ont pas été long-tems sans faire sur le terrain quelques opérations pour les mesurer, tant en longueur qu'en surface, en entier ou par parties ; & voilà la Géométrie dans son origine.

De l'Égypte elle passa en Grèce, où on prétend que Thalès la porta. Il ne se contenta pas d'apprendre aux Grecs ce qu'il avoit reçu des Égyptiens ; il ajouta à ce qu'il avoit appris, & enrichit cette science de plusieurs propositions. Après lui vint Pythagore, qui cultiva aussi la Géométrie avec succès, & à qui on attribue la fameuse proposition du quarré de l'hypoténuse. On prétend qu'il fut ravi de cette découverte, qu'il sacrifia de joie cent bœufs aux Muses. Il y a apparence, dit un auteur moderne, que c'étoient des bœufs de cire ou de pâte ; ce Pythagore défendoit de tuer les animaux, en conséquence de son système de la métempsycose, qui (pour un philosophe payen) n'étoit pas l'opinion du monde la plus absurde. Mais il y a encore plus d'apparence encore que le fait n'est pas vrai ; ce qui dispense de l'expliquer. Après Pythagore, les philosophes & les écoles qu'ils formèrent continuèrent à cultiver l'étude de la Géométrie. Plutarque nous apprend qu'Anaxagore de Clazomène s'occupa du problème de la quadrature du cercle dans la prison où il avoit été renfermé, & qu'il composa même un ouvrage sur ce sujet. Cet Anaxagore avoit été accusé d'impiété, pour avoir dit que les astres étoient matériels ; & il eût été condamné à mort, sans Périclès qui lui sauva la vie. On voit par cet exemple, s'il est permis de le dire en passant, que ce n'est pas d'aujourd'hui que les philosophes sont persécutés pour avoir eu raison ; & que les prêtres grecs étoient aussi habiles que certains théologiens modernes, à ériger en articles de religion ce qui n'en étoit pas.

*Platon qui donnoit à Anaxagore de grands éloges sur son habileté en Géométrie, en méritoit aussi beaucoup lui-même. On sait qu'il donna une solution très simple de la duplication du cube. On sait aussi que ce grand philosophe appeloit Dieu l'éternel géomètre (idée vraiment juste & digne de l'Être suprême), & qu'il regardoit la Géométrie comme si nécessaire à l'étude de la Philosophie, qu'il avoit écrit sur la porte de son école ces paroles mémorables, qu'**aucun ignorant en Géométrie n'entre ici**.*

Les instruments de dessin de géométrie (J.-J. Lequeu)

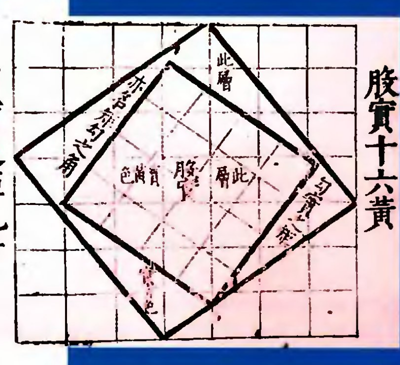


LES 370 DÉMONSTRATIONS DU THÉORÈME DE PYTHAGORE

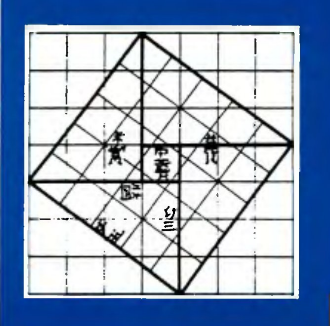
C'est en effet le nombre de démonstrations réunies par Elisha Scott Loomis dans son livre The Pythagorean proposition (1968, National Council of teachers of mathematics).
Depuis plus de 2000 ans, les chinois, les hindous, les arabes et même les présidents des États-Unis ont en effet cherché la leur…

Les puzzles de Pythagore

Les mathématiciens chinois, puis hindous et arabes, redécouvrirent le théorème de Pythagore. Et ils inventèrent même de nombreuses façons de le "démontrer" en utilisant la technique du puzzle.





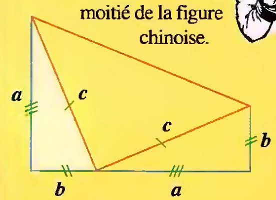


Le puzzle chinois
Commentez les figures chinoises ci-contre.

Un puzzle de Henry Dudeney
(inventeur de milliers de récréations mathématiques au début du siècle). Dans la figure de l'encadré rouge, expliquez ce qui se passe en retrouvant les transformations qui échangent les quadrilatères coloriés d'un même bleu.

La démonstration du président

Le 1er avril 1876, le député américain James A. Garfield (qui sera le vingtième président des États-Unis) proposa une démonstration basée sur la moitié de la figure chinoise.



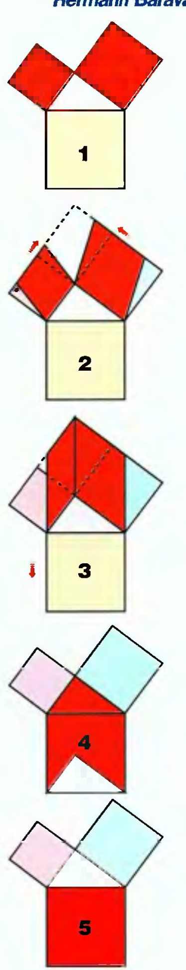
Aire du trapèze $= \dfrac{b+a}{2} \times (b+a) =$

$2 \times \dfrac{ab}{2} + \dfrac{1}{2}c^2 =$ Aire des trois triangles.

D'où $a^2 + b^2 = c^2$.

COURT-MÉTRAGE

Voici le film de la démonstration du théorème de Pythagore découverte en 1945 par Hermann Baravalle.

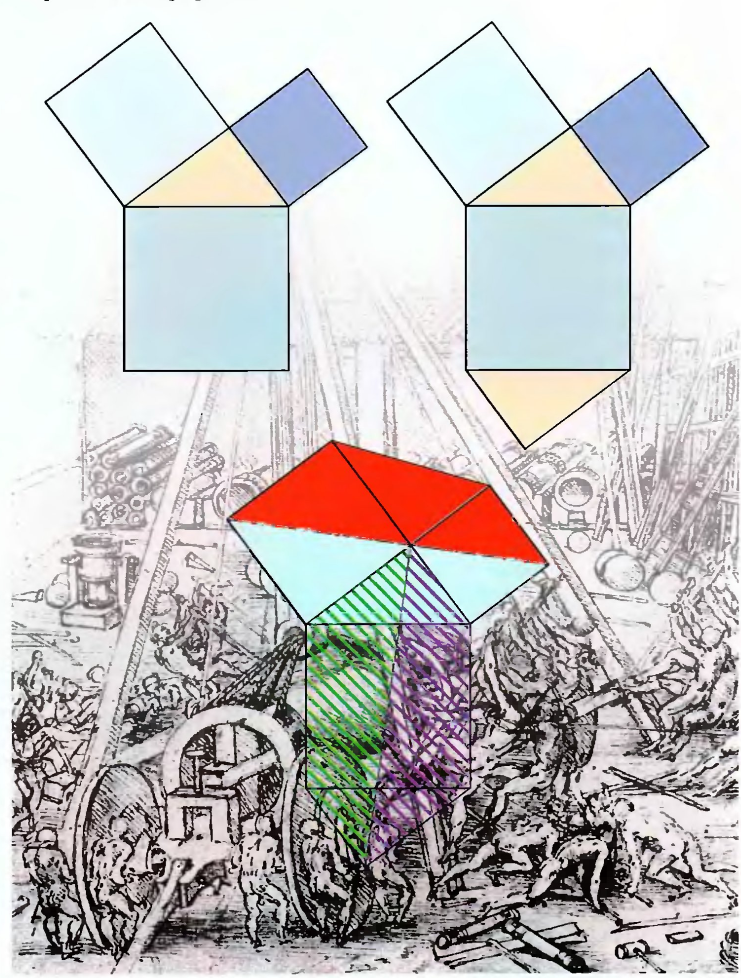


Critique du film

Attention cette démonstration n'est pas la même que celle d'Euclide de la page suivante ! Il faudrait expliquer pourquoi les deux parallélogrammes se rencontrent, à l'étape n° 3, juste au dessus de l'angle droit.

Pythagore : la démonstration de Léonard de Vinci

À la figure de base, Léonard de Vinci ajoute un triangle, tête en bas et fait apparaître 4 quadrilatères superposables…



Ces quadrilatères sont curieux mais ils sont superposables (à vous, lecteur ébahi, d'expliquer pourquoi !). Alors…

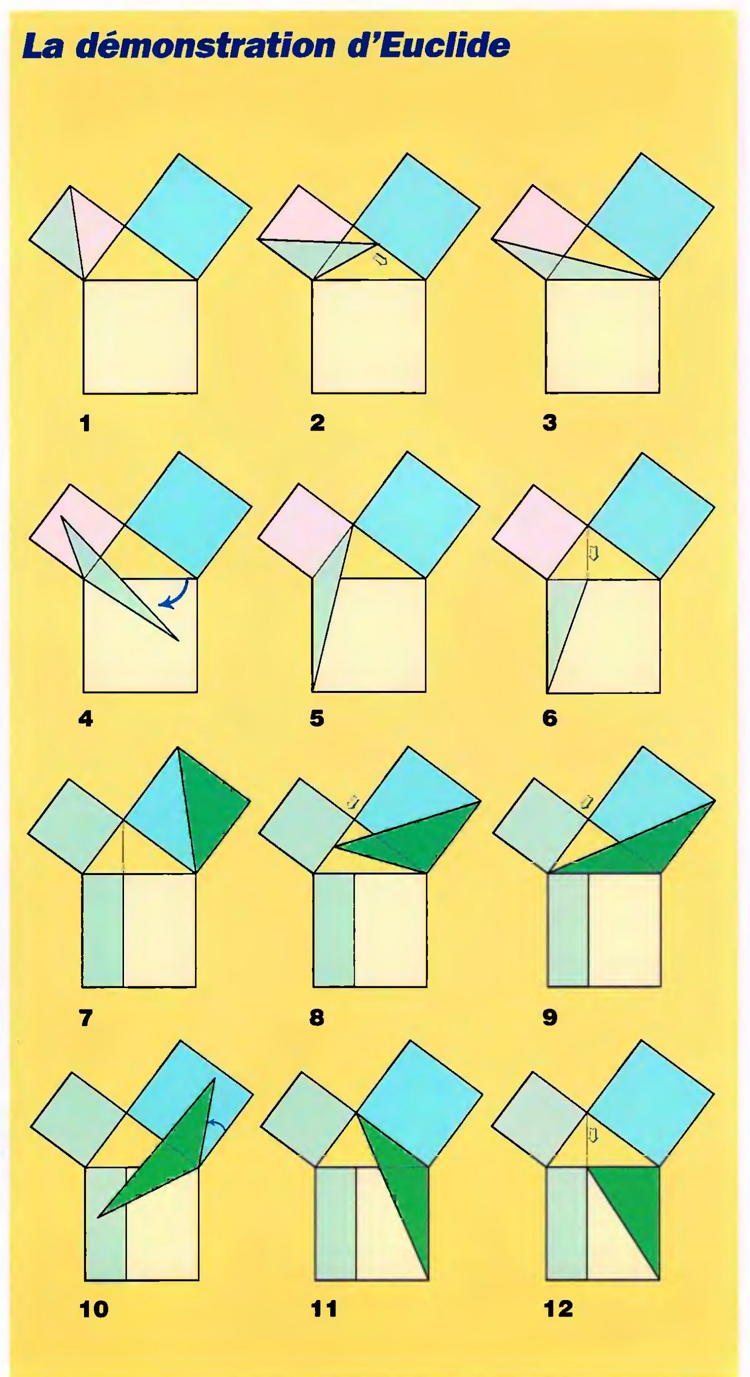
… les deux quadrilatères rouge et bleu ont même surface que deux triangles et deux carrés construits sur les côtés de l'angle droit.

… les deux quadrilatères hachurés vert et violet ont même surface que deux triangles et le carré construit sur l'hypoténuse.

Conclusion, en enlevant les deux triangles : **le carré construit sur l'hypoténuse a même aire que l'union des deux carrés construits sur les côtés de l'angle droit**.

Voici la plus vieille et la plus légendaire démonstration du théorème de Pythagore

La démonstration d'Euclide



Légendes des images

1 et 7. *Intéressons-nous au demi-carré vert, et, particulièrement à la* ***surface*** *de ce triangle.*

2 et 8. *L'aire de cette surface ne varie pas lorsque l'un de ses sommets...*

3 et 9. *se déplace parallèlement au côté opposé...*

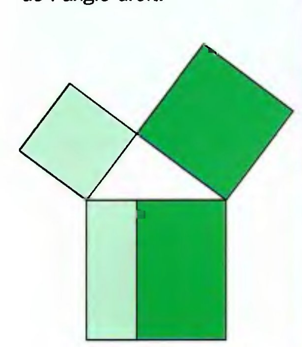
4 et 10. *et son aire reste évidemment la même lorsque le triangle tourne autour d'un sommet.*

5 et 11. *Après un quart de tour, voilà où il est passé.*

6 et 12. *Mais son aire ne varie toujours pas lorsque l'un de ses sommets se déplace parallèlement au côté opposé.*

Conclusion

Finalement les doubles des triangles verts ont aussi des aires égales, et, donc, le carré construit sur l'hypoténuse a bien une aire égale à la somme de celles des carrés construits sur les deux côtés de l'angle droit.



L'IDÉE DE PAPPUS

Dans la grande cité scientifique d'Alexandrie, aux premiers siècles de notre ère, un géomètre nommé Pappus eut une idée géniale.

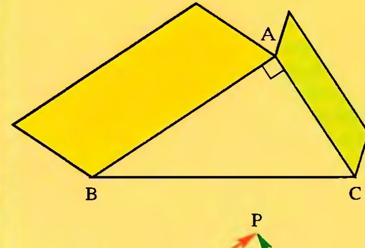


Le phare d'Alexandrie

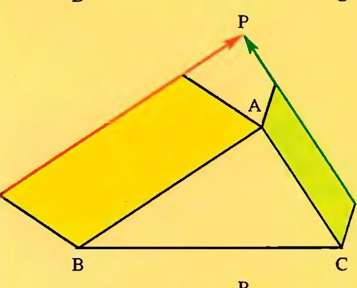
Généralisation ?

Que devient le théorème de Pappus si on remplace les parallélogrammes par des carrés ?

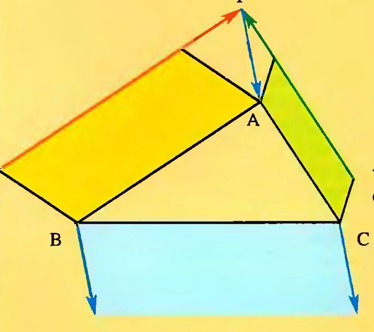
Une généralisation du théorème de Pythagore



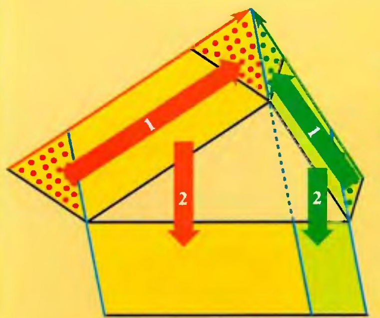
◀ Sur les deux côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle ABC construire deux parallélogrammes **quelconques** !



◀ Prolonger les côtés des parallélogrammes opposés aux côtés de l'angle droit du triangle rectangle.
Ils se coupent en P.



◀ Faire subir à [BC] la translation qui envoie P sur A.



◀ Les mouvements suggérés sur l'image ci-contre montrent l'impressionnante propriété :
L'aire du parallélogramme bleu est la somme des aires des parallélogrammes vert et doré.

DÉDUCTIONS

Dans l'aventure intitulée « Le rituel des Musgrave », Sherlock Holmes, le plus célèbre des détectives raconte à son ami le docteur Watson le déroulement de sa deuxième enquête. Heureusement , Sherlock Holmes connaissait le théorème qu'il fallait.

Les données du problème

Sherlock Holmes doit déchiffrer un texte fort obscur, connu sous le nom de « Rituel des Musgrave », texte transmis de génération en génération dans la famille des Musgrave et dont le sens a été perdu au fil du temps.
Voici le début du rituel :
« — À qui l'appartenance ?
— À celui qui est parti.
— Qui l'aura ?
— Celui qui doit venir.
— Quel mois était-ce ?
— Le sixième après le premier.
— Où était le soleil ?
— Au-dessus du chêne.
— Où était l'ombre ?
— Sous l'orme ...
— Combien de pas ?
— Nord : dix et dix. Est : cinq et cinq. Sud : deux et deux. Ouest : un et un. Et au-dessous... »

La fin de l'aventure

Sherlock Holmes suivit alors les autres indications du rituel et finit par découvrir dans une cave secrète l'ancienne couronne des rois d'Angleterre.

Élémentaire, mon cher Thalès

PREMIÈRES DÉDUCTIONS

Sherlock Holmes : « Il m'apparut tout de suite, dès la première lecture du rituel, que les mesures devaient se rapporter à un endroit auquel faisait allusion le reste du document. Si nous localisions cet endroit, nous devrions être en bonne voie pour savoir quel était ce secret que les vieux Musgrave avaient jugé nécessaire d'enrober d'une façon si curieuse. Pour point de départ, il y avait un chêne et un orme. Quant au chêne, pas d'hésitation possible : juste devant la façade de la demeure, sur le côté gauche de l'avenue, se dressait un patriarche parmi les chênes, l'un des arbres les plus magnifiques que j'aie jamais vus.
— Était-il là quand votre rituel fut écrit ? demandai-je quand nous passâmes devant le géant.
— Selon toute probabilité, il devait déjà être là au temps de Guillaume le Conquérant. Il a une circonférence de sept mètres ! Un de mes points de départ était donc bon.
— Avez-vous de vieux ormes ? demandai-je.
— Il y en avait un très vieux par là-bas, mais il a été foudroyé voici dix ans, et nous avons abattu la souche.
— Pourriez-vous vous rappeler son emplacement ?
— Oh ! oui.
— Il n'y a pas d'autres ormes ?
— Il n'y en a pas d'anciens. Mais il y a beaucoup de hêtres. Nous étions arrivés dans une charrette anglaise ; mon compagnon fit virer son cheval et, avant d'entrer dans la maison, il me mena vers l'endroit où une cicatrice sur la pelouse demeurait bien visible, presque à mi-distance entre le chêne et le manoir. Mon enquête me parut progresser.
— Je suppose qu'il est impossible de trouver quelque part la hauteur qu'atteignait ce vieil orme ? demandai-je.
— Je puis vous la donner tout de suite : cinquante quatre pieds.
— Comment se fait-il que vous la connaissiez ? questionnai-je non sans surprise.
— Quand mon vieux précepteur m'infligeait un exercice de trigonométrie, il y avait toujours à calculer des hauteurs. Au long de mon enfance, j'ai calculé la hauteur de chaque arbre et de chaque bâtiment du domaine.
... Les données de mon petit problème se précisaient plus vite que je ne l'avais espéré. »

LA SOLUTION

Sherlock Holmes s'adresse au docteur Watson : « Je levai les yeux vers le soleil : il était bas ; dans moins d'une heure il arriverait juste au-dessus des branches supérieures du vieux chêne. Une condition figurant au rituel serait remplie. Et l'ombre de l'orme devait signifier la limite de l'ombre, sinon le tronc aurait été choisi comme point de repère. J'avais donc à déterminer où se situerait la limite de l'ombre quand le soleil serait juste au-dessus du chêne.
— Mais puisque l'orme n'était plus là, Holmes, vous avez dû éprouver beaucoup de difficultés ?
— Voilà : je me rendis avec Musgrave dans son bureau, taillai moi-même cette cheville en bois à laquelle j'attachai cette longue ficelle avec un nœud à chaque pied. Puis je pris une canne à pêche, qui faisait juste six pieds, et je revins vers l'emplacement de l'orme. Le soleil frôlait le haut du chêne. J'attachai un bout de la ficelle au bas de la canne à pêche, tendis l'autre bout en plantant la cheville dans la direction de l'ombre et la mesurai. Elle avait huit pieds de long. À présent mon calcul devenait simple. Si une canne à pêche de six pieds projetait une ombre de huit pieds, un orme de cinquante quatre pieds en projetterait une de soixante seize, et la direction de la première serait naturellement la direction de la deuxième. Je mesurai la distance : elle m'amena presque au mur de la maison ... »



Dessin de Dominique Izard

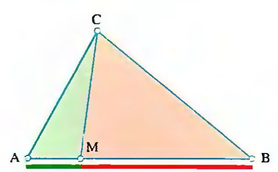
SACHEZ PRENDRE L'AIRE

Au début des mathématiques, il y a la mesure : la mesure des longueurs et surtout la mesure des surfaces. Le calcul des aires, leur combinaison, leur découpage, leur reconstruction donnent naissance à des résultats souvent étonnants.



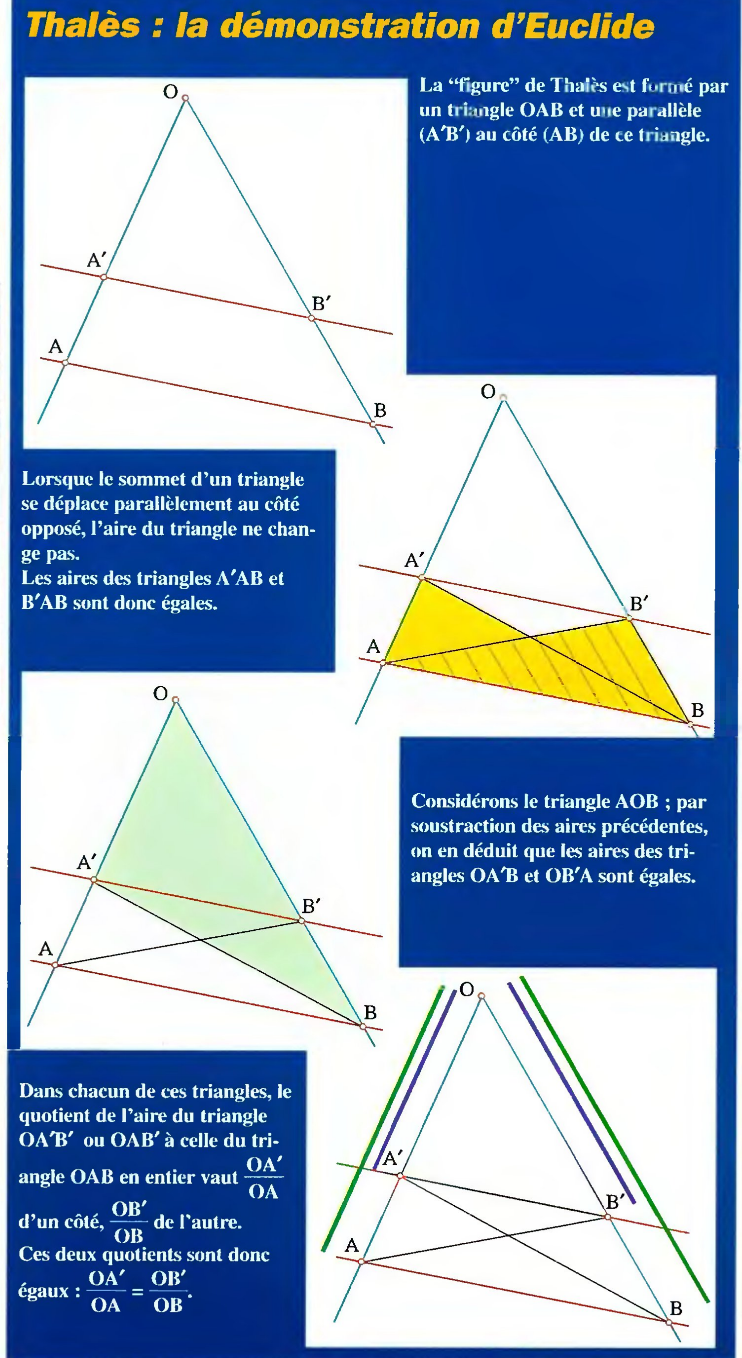
Le théorème-clé

Pour que tous les maillons de la démonstration ci-contre soient justifiés, il faut disposer du théorème suivant :



Si un segment [CM] coupe un triangle ABC en deux, alors le rapport des aires $\frac{\text{Aire (ACM)}}{\text{Aire (BCM)}}$ *est égal au rapport des longueurs* $\frac{AM}{BM}$.
Connaissant la formule donnant l'aire d'un triangle, vous n'aurez pas beaucoup de mal à démontrer vous-même ce théorème.

Thalès : la démonstration d'Euclide



La "figure" de Thalès est formé par un triangle OAB et une parallèle (A'B') au côté (AB) de ce triangle.

Lorsque le sommet d'un triangle se déplace parallèlement au côté opposé, l'aire du triangle ne change pas.
Les aires des triangles A'AB et B'AB sont donc égales.

Considérons le triangle AOB ; par soustraction des aires précédentes, on en déduit que les aires des triangles OA'B et OB'A sont égales.

Dans chacun de ces triangles, le quotient de l'aire du triangle OA'B' ou OAB' à celle du triangle OAB en entier vaut $\frac{OA'}{OA}$ **d'un côté,** $\frac{OB'}{OB}$ **de l'autre.**
Ces deux quotients sont donc égaux : $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB}$.

Test 10

Pour chacune des 10 questions, indiquer la ou les bonnes réponses parmi A, B, C, D ou E

	Questions	A	B	C	D	E
1	Dans quelle(s) figure(s) a-t-on une configuration où s'applique l'énoncé de Thalès ?					
2	Quelles sont les égalités vraies ?	$AE \times ED = CE \times CB$	$\frac{AE}{AD} = \frac{CE}{CB}$	$\frac{AE}{AD} = \frac{BE}{BC}$	$ED \times BE = AE \times CE$	$\frac{EC}{EB} = \frac{ED}{EA}$
3	Quelles sont les égalités vraies ?	$\frac{OD}{OE} = \frac{OI}{OG}$	$\frac{OD}{OE} = \frac{OI}{OF}$	$\frac{BH}{BC} = \frac{BF}{BA}$	$\frac{CH}{CB} = \frac{CE}{CA}$	$\frac{CI}{CB} = \frac{CD}{CA}$
4	Dans un triangle XYZ, si $XY^2 = YZ^2 + XZ^2$, alors XYZ ...	est rectangle en X	est rectangle en Y	est rectangle en Z	a un angle obtu	est équilatéral
5	ABC est rectangle en A. Si $AB = 8\sqrt{2}$ et $AC = 3\sqrt{8}$ alors $BC = ...$	$10\sqrt{2}$	200	$5\sqrt{8}$	$\sqrt{200}$	$8\sqrt{5}$
6	Deux des côtés d'un triangle rectangle valent 6 et 8. Combien peut mesurer l'autre ?	$= 10$	10	0	$3\sqrt{2}$	$2\sqrt{7}$
7	ABC est un triangle équilatéral de centre O et de côté c.	$AO^2 = \frac{c^2}{3}$	la distance de O à un côté est $c\frac{\sqrt{3}}{6}$	la hauteur a pour longueur $c\sqrt{3}$	l'aire est égale à $4c^2$	le rayon du cercle circonscrit est $c\frac{\sqrt{3}}{2}$
8	(BC)//(DE)	Les aires de BDE et CDE sont égales	Les aires de DCE et BCE sont égales	Les aires de ABE et ACD sont égales	Les aires BCD et EBC sont égales	Les aires de ABE et ADE sont égales
9		$\frac{AB}{BC} = \frac{BD}{DE}$	$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DE}$	$\frac{AB}{BC} = \frac{AE}{DE}$	$\frac{AB}{BC} = \frac{AC}{CB}$	$\frac{AC}{BC} = \frac{AE}{ED}$
10	Les côtés a; b; c peuvent valoir	5; 12; 13	7; 24; 25	20; 21; 29	8; 15; 17	119; 120; 169

THÈME 11

Des figures géométriques

En mathématique, on calcule, on découvre des techniques, on trace, on conjecture… Mais ce qui caractérise l'activité mathématique est que l'on tente d'y raisonner : prouver des liens logiques entre deux affirmations, refuser de rester dans le doute, établir la vérité de nouvelles propriétés à partir de propriétés déjà connues…
Les figures géométriques sont un prétexte à la fois simple et riche pour cette activité de raisonnement, qui gagnerait à être plus répandue de par le monde.

Triangles et quadrilatères

Triangle : du latin *tri* (trois) *angulus* (angle). **Quadrilatère** : du latin *quadri* (quatre) *latus* (côté). Que de fantaisie dans l'origine des mots ! Et pour cinq ? **Pentagone** : du grec *penta* (cinq) et *gonos* (angle, genou).

La famille des triangles

Dans le monde des triangles, ils sont nombreux à revendiquer leur identité : isocèles, équilatéraux, rectangles et le malheureux triangle quelconque, qui croît à tort qu'il n'intéresse personne.

Des droites dans le triangle

Lequel d'entre vous n'a jamais rencontré un triangle à la recherche de son centre. Son centre ? C'est vite dit : que de "centres" pour une figure si simple…

La famille des quadrilatères

Avec des parallèles, des perpendiculaires, des longueurs égales et quatre côtés, que de combinaisons ! C'est le petit jeu des propriétés nécessaires et suffisantes qui animent le monde élémentaire des quadrilatères.

Chance, miracle ou magie ?

SUR UNE ÎLE ayant exactement la forme d'un triangle équilatéral ABC (de côté égal à *a*), on choisit un point P au hasard pour construire une cabane.

On s'intéresse à la longueur totale des chemins permettant d'aller de la cabane à chacun des bras de la rivière : PI + PJ + PK.

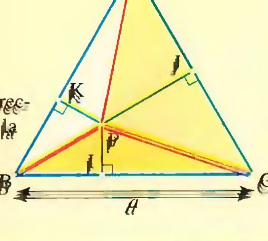
Est-il possible que cette longueur soit la même pour n'importe quel point P de l'île ?

La réponse est surprenante : oui ! et la démonstration tient dans le fait que l'aire S du triangle ABC est égale à la somme des aires des triangles PAB, PBC et PCA :

$$S = \frac{1}{2}PI \times BC + \frac{1}{2}PJ \times AC + \frac{1}{2}PK \times AB$$

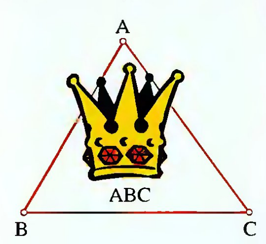
$$S = \frac{1}{2}(PI + PJ + PK)a.$$

On trouve donc $PI + PJ + PK = \frac{2S}{a}$.



C'est bien un nombre qui ne dépend pas de P !
Voilà qui est vraiment facile à démontrer !
La propriété précédente est encore vraie dans le rectangle : pour tout point P intérieur à un rectangle la somme des distances aux côtés est constante (et c'est toujours très facile à démontrer).
Et dans un parallélogramme, il en est toujours de même…

Sa majesté le triangle : trois points non alignés suffisent à lui donner vie. On le désigne alors en juxtaposant le nom de ces trois sommets, dans un ordre indifférent. Chez lui, tout marche par trois : angles, sommets, côtés mais on n'y manque pas d'esprit de contradiction : chaque côté est opposé à un sommet.



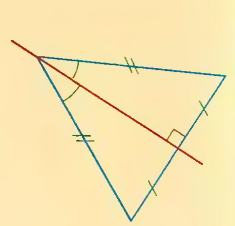
LA FAMILLE DES TRIANGLES

11. 1 Triangle isocèle

Un triangle isocèle est un triangle dont deux côtés ont même mesure.

Le côté qui se distingue des autres par sa longueur est appelé la base du triangle isocèle.

La médiatrice de la base passe par le troisième sommet. Elle est axe de symétrie du triangle. Elle est donc aussi médiane, hauteur et bissectrice.



*Isocèle est un mélange de grec **iso** (égal) et de latin **scala** (échelle ou mesure). Un triangle isocèle a des "mesures égales". **Équilatéral** vient du latin **equi** (égal) et **latus** (côté).*

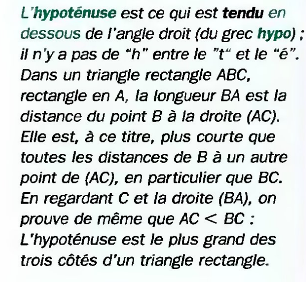
11. 2 Triangle équilatéral

Un triangle équilatéral est un triangle dont les trois côtés ont la même mesure.

Il est donc triplement isocèle et les trois médiatrices de ses côtés sont axes de symétrie.

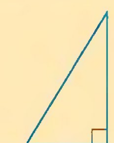
Les médiatrices d'un triangle équilatéral sont aussi les hauteurs, les médianes et les bissectrices du triangle.

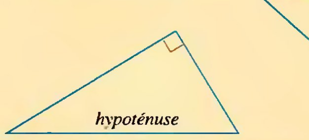
*L'**hypoténuse** est ce qui est **tendu** en dessous de l'angle droit (du grec **hypo**) ; il n'y a pas de "h" entre le "t" et le "é". Dans un triangle rectangle ABC, rectangle en A, la longueur BA est la distance du point B à la droite (AC). Elle est, à ce titre, plus courte que toutes les distances de B à un autre point de (AC), en particulier que BC. En regardant C et la droite (BA), on prouve de même que AC < BC : L'hypoténuse est le plus grand des trois côtés d'un triangle rectangle.*



11. 3 Triangle rectangle

Un triangle rectangle est un triangle dont deux côtés sont perpendiculaires (autrement dit, qui possède un angle droit).

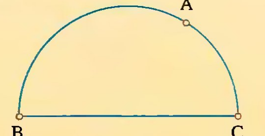


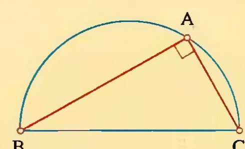


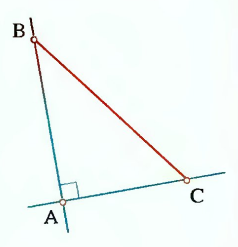
Le côté opposé à l'angle droit s'est vu attribuer le beau nom d'hypoténuse.

11. 4 Énoncé du triangle rectangle

Si A appartient au cercle de diamètre [BC] (avec A ≠ B et A ≠ C), alors le triangle ABC est rectangle en A.







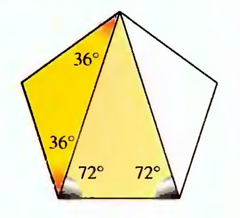
Ce théorème a déjà été énoncé en **9. 15**.

11. 5 Énoncé réciproque

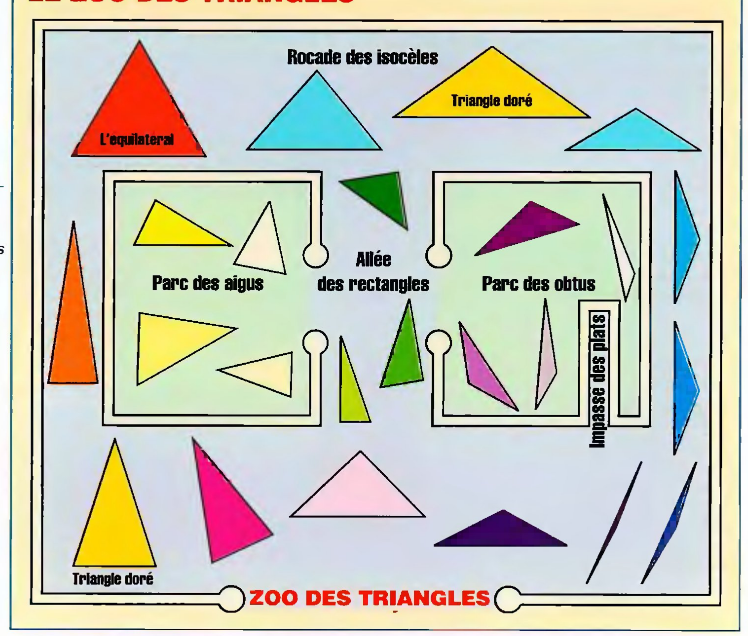
Si le triangle ABC est rectangle en A, alors A appartient au cercle de diamètre [BC].

La famille des triangles est extrêmement variée selon la valeur de leurs trois angles.
Nous les avons regroupés dans un "zoo" dont le plan n'est pas dessiné n'importe comment.
Trouvez-en la la logique.
Est-il possible de rencontrer un triangle vraiment quelconque ?
(Voir page 127)

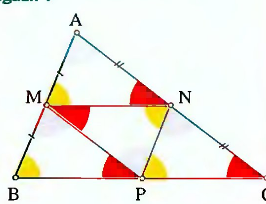
Un "triangle doré" aigu a des angles de 72°, 72° et 36°.
Un "triangle doré" obtus a des angles de 36°, 36° et 108°.
*On retrouve ces triangles dans un pentagone et le rapport de leurs côtés vaut le **nombre d'or**.*



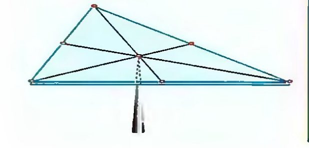
LE ZOO DES TRIANGLES



Pour quelles raisons les angles marqués d'une même couleur sont-ils égaux ?



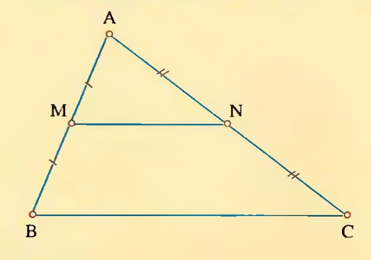
Le centre de gravité est une notion physique : c'est le point où il faudrait piquer une épingle si l'on disposait d'un triangle homogène découpé qu'on veuille faire tenir en équilibre à la pointe de cette épingle.



LES DROITES DANS LE TRIANGLE

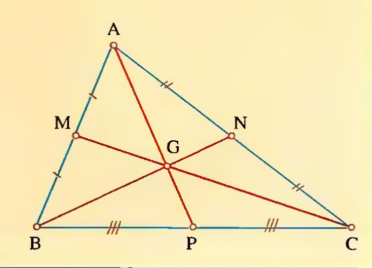
11. 6 Droite des milieux

Dans un triangle ABC, la droite qui joint les milieux M et N des deux côtés [AB] et [AC] est parallèle au troisième côté [BC]. De plus, BC = 2MN.



11. 7 Médianes

Une médiane d'un triangle est une droite qui passe par un sommet et par le milieu du côté opposé. Les trois médianes d'un triangle sont concourantes en un point qui est le centre de gravité du triangle.



***Média** veut dire **milieu**. Les médianes et les médiatrices passent par les milieux des côtés.*
***Circonscrit** vient du latin **circum** (autour) et **scriptus** (écrit). Un cercle circonscrit est "tracé autour du triangle".*

11. 8 Médiatrices

Les trois médiatrices des côtés d'un triangle sont concourantes en un point qui est le centre du cercle circonscrit au triangle.

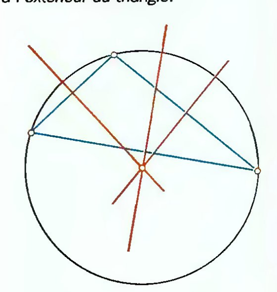
Démonstration.

Soit un triangle ABC. Les points de la médiatrice de [AB] sont à égale distance de A et de B. Les points de la médiatrice de [BC] sont à égale distance de B et de C. Le point d'intersection O de ces deux médiatrices se trouve donc à égale distance des trois points A, B et C (*on est sûr de l'existence du point* O, *car si les médiatrices étaient parallèles, les côtés* [AB] *et* [BC] *qui leurs sont perpendiculaires, le seraient aussi*).

Étant à égale distance de A et C, O est sur la médiatrice de [AC].

Étant à égale distance de A, B et C, le point O est centre d'un cercle qui passe par A, B et C.

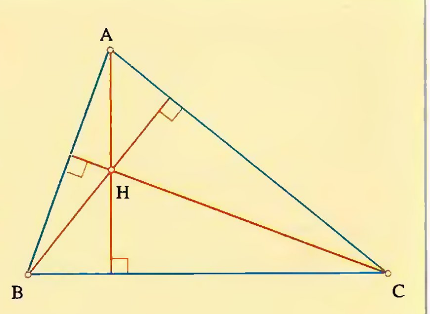
Si le triangle a un angle obtus, le centre de son cercle circonscrit est à l'extérieur du triangle.

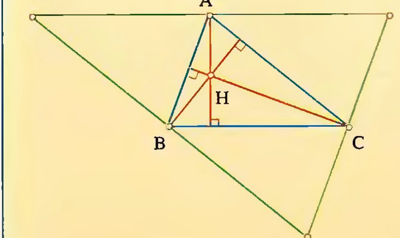


***Orthocentre** vient de **centre** (!) et du grec **ortho** qui indique un **angle droit**. Les hauteurs sont "orthogonales" aux côtés.*

11. 9 Hauteurs

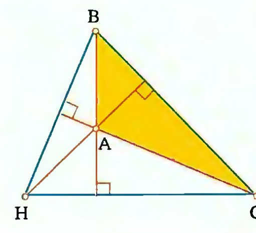
Une hauteur d'un triangle est une droite qui passe par un sommet et qui est perpendiculaire au côté opposé.
Les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes en un point qu'on appelle l'orthocentre du triangle.





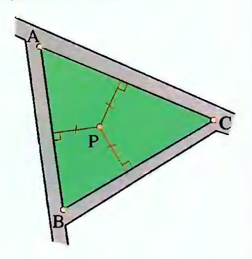
REMARQUE :
Les hauteurs d'un triangle sont les médiatrices du "grand" triangle obtenu en traçant, par les sommets, les parallèles aux côtés. Leurs concours est donc une conséquence de celle des médiatrices du "grand" triangle.

Si un triangle a un angle obtus, son orthocentre est à l'extérieur du triangle !



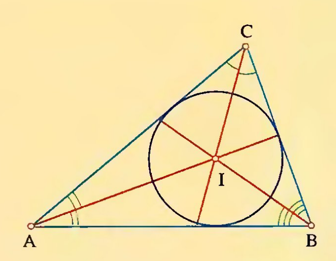
Trois routes rectilignes délimitent un triangle. On veut construire une maison à égale distance de chacune des trois routes..

■ Où placer la maison ?



11.10 Bissectrices

Les trois bissectrices des angles d'un triangle sont concourantes en un point qui est le centre du cercle inscrit dans le triangle.



Démonstration

Soit un triangle ABC.

Les points de la bissectrice de $\widehat{BAC}$ sont à égale distance des côtés de l'angle (AB) et (AC).

Les points de la bissectrice de $\widehat{ABC}$ sont à égale distance de (BA) et de (BC).

Le point d'intersection I de ces deux bissectrices se trouve donc à égale distance des trois droites (AB), (AC) et (BC).

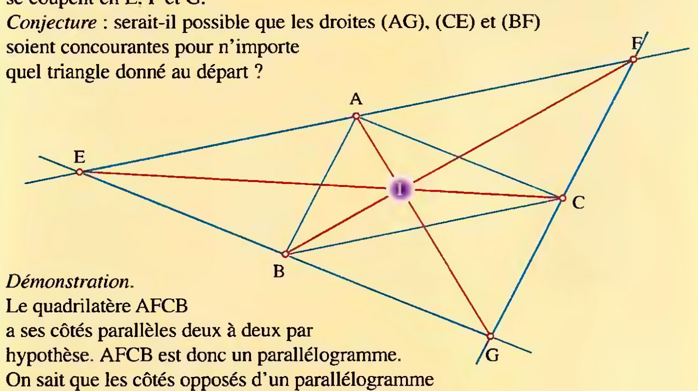
Étant à égale distance de (AC) et (BC), I est sur la bissectrice de $\widehat{ACB}$.

Étant à égale distance des trois côtés de ABC, I est le centre d'un cercle dit "inscrit" dans ce triangle, tangent à chacun des trois côtés du triangle.

11.11 Un exemple-type : concours de droites

Par les sommets d'un triangle ABC, on trace les parallèles aux côtés. Ces parallèles se coupent en E, F et G.

Conjecture : serait-il possible que les droites (AG), (CE) et (BF) soient concourantes pour n'importe quel triangle donné au départ ?



Démonstration.

Le quadrilatère AFCB a ses côtés parallèles deux à deux par hypothèse. AFCB est donc un parallélogramme.

On sait que les côtés opposés d'un parallélogramme ont même mesure, donc AF = BC.

Pour les mêmes raisons, AEBC est un parallélogramme et AE = BC. Donc AE = AF et comme A, E, F sont alignés, A est le milieu de [EF].

On peut démontrer de la même façon que B est le milieu de [EG] et que C est le milieu de [FG].

Les droites (AG), (CE) et (BF) sont donc les médianes du triangle EFG et, à ce titre, elles sont concourantes.

Dans cette situation, on a utilisé successivement :

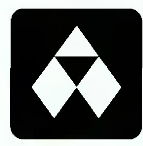
- *une propriété caractéristique du parallélogramme.*
- *une propriété des côtés opposés du parallélogramme.*
- *l'importante propriété de l'égalité, très souvent présente dans les démonstrations mais souvent de façon tacite :*
  si a = b et b = c, alors a = c.
- *la définition et la propriété de concours des médianes du triangle.*

De nombreuses marques commerciales utilisent des figures géométriques simples et souvent symétriques pour leur logo.

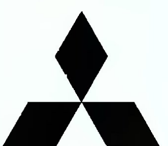
Y reconnaissez-vous triangles ou quadrilatères particuliers ?



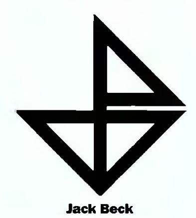
American Association



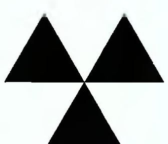
Aluminium Company



Mitsubishi



Jack Beck



Ministère du logement britannique

11.12 Démonstration du concours des médianes

Le concours des médianes d'un triangle donne lieu à une magnifique démonstration, dont nous vous donnons le plan :

- Soit (CI) et (BJ) les médianes se coupant en G, E le point tel que I soit le milieu de [EG] et F le point tel que F soit le milieu de [FG].
- EAGB et AFCE sont des parallélogrammes (pourquoi ?).
- EBFC est un parallélogramme et G est le milieu de [BF] (pourquoi ?).

Soit K le milieu de [BC].

- (GK) est parallèle à (FC). Pourquoi ?

(AG) est parallèle à (FC). Pourquoi ?

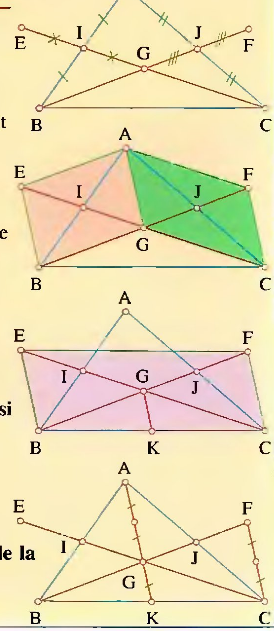
A, K et G sont donc alignés.

La troisième médiane (AK) passe donc elle aussi par G.

- GK = $\frac{1}{2}$ FC (pourquoi ?)

et FC = AG. Donc :

Le point G est au tiers de la médiane à partir de la base.



11.13 Droites particulières du triangle rectangle

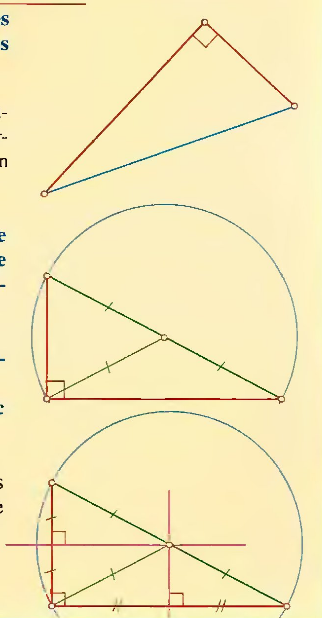
Dans un triangle rectangle, deux des hauteurs sont confondues avec des côtés (les côtés de l'angle droit).

C'est une application de la définition des hauteurs et une conséquence de l'unicité de la perpendiculaire à une droite donnée passant par un point donné.

Dans un triangle rectangle, la médiane (considérée comme un segment) issue de l'angle droit mesure la moitié de l'hypoténuse.

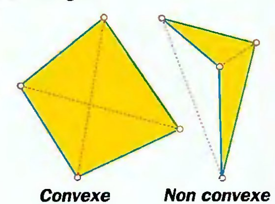
Les médiatrices se coupent au milieu de l'hypoténuse.
Le cercle circonscrit au triangle est donc centré au milieu de l'hypoténuse.

Ces deux dernières propriétés ne sont jamais qu'une autre formulation de la réciproque de l'énoncé du triangle rectangle (11.5).

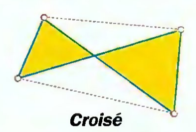


Le quadrilatère tire son nom du latin (**quadrus** : quatre et **latus** : côtés). Ses confrères avec davantage de côtés ont eu droit eux, à des racines grecques (exemple : polygone, **poly** : plusieurs et **gonos** : angle).

Une figure est **convexe** si, en allant en ligne droite, d'un point de la figure à un autre point de la figure, on reste dans la figure.

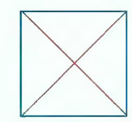


Convexe **Non convexe**

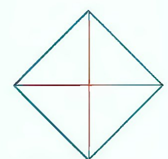


Croisé

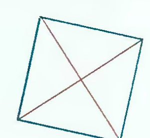
Un quadrilatère est dit **croisé** lorsque ses côtés se coupent ailleurs qu'aux sommets.



Carré assis sur un de ses côtés



Carré assis sur une de ses diagonales

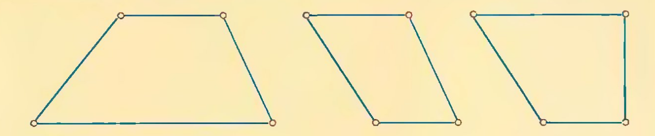


Carré faisant fi de l'horizontale et de la verticale

LA FAMILLE DES QUADRILATÈRES

11.14 Trapèze

Un trapèze est un quadrilatère dont deux côtés sont parallèles.



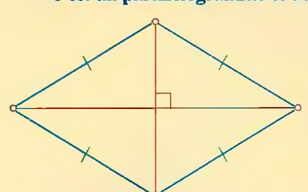
11.15 Parallélogramme

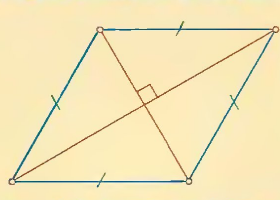
Un quadrilatère convexe qui vérifie une des quatre propriétés ci-dessous est un parallélogramme :
- **les diagonales ont le même milieu ;**
- **les côtés opposés sont parallèles deux à deux ;**
- **les côtés opposés ont même mesure deux à deux ;**
- **deux côtés opposés sont parallèles et de même longueur.**

Les propriétés ci-dessus sont équivalentes, ce qui signifie que si un quadrilatère convexe vérifie l'une des propriétés ci-dessus, il les vérifie toutes.

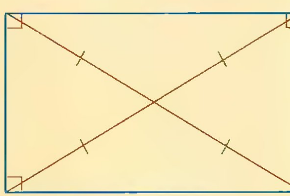
11.16 Parallélogrammes particuliers

■ **Un quadrilatère qui vérifie l'une des propriétés équivalentes ci-dessous est un losange :**
- **il a ses quatre côtés de même mesure ;**
- **c'est un parallélogramme et ses diagonales sont perpendiculaires ;**
- **c'est un parallélogramme et deux côtés consécutifs ont la même mesure.**

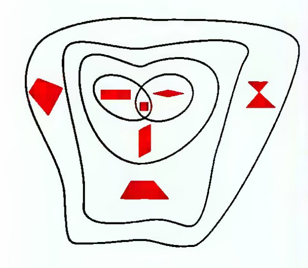




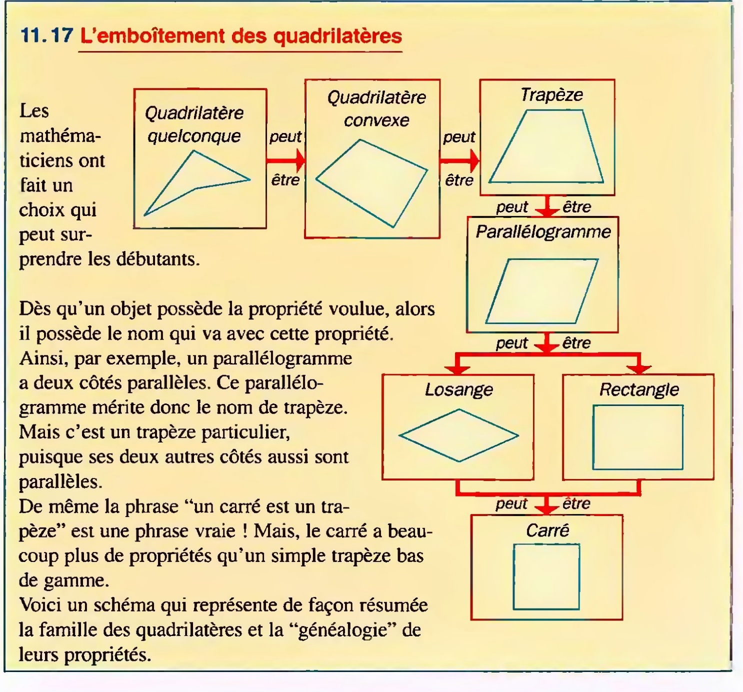
■ **Un quadrilatère qui vérifie l'une des propriétés équivalentes ci-dessous est un rectangle :**
- **il a trois angles droits ;**
- **c'est un parallélogramme et ses diagonales ont la même mesure ;**
- **c'est un parallélogramme avec un angle droit.**



■ **Un carré est à la fois un losange et un rectangle.**



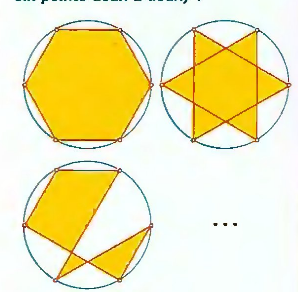
11.17 L'emboîtement des quadrilatères



Les mathématiciens ont fait un choix qui peut surprendre les débutants.

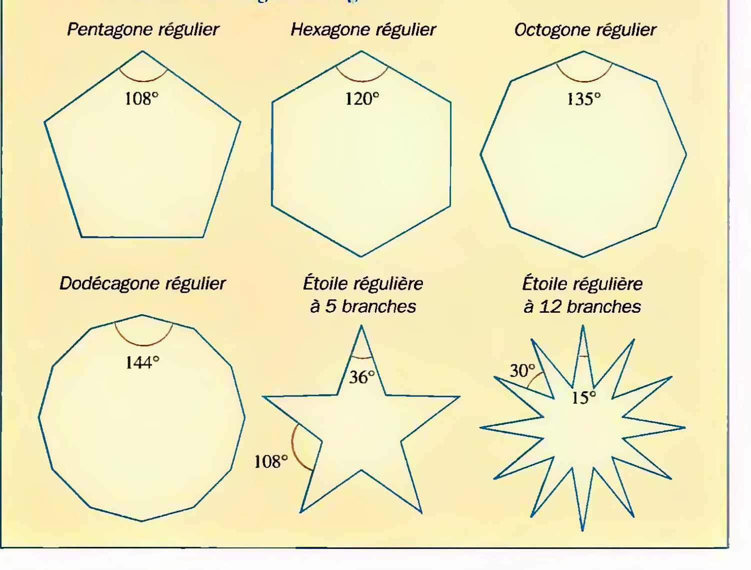
Dès qu'un objet possède la propriété voulue, alors il possède le nom qui va avec cette propriété. Ainsi, par exemple, un parallélogramme a deux côtés parallèles. Ce parallélogramme mérite donc le nom de trapèze. Mais c'est un trapèze particulier, puisque ses deux autres côtés aussi sont parallèles.
De même la phrase "un carré est un trapèze" est une phrase vraie ! Mais, le carré a beaucoup plus de propriétés qu'un simple trapèze bas de gamme.
Voici un schéma qui représente de façon résumée la famille des quadrilatères et la "généalogie" de leurs propriétés.

Au moyen d'un compas, on peut reporter exactement 6 fois le rayon d'un cercle sur la circonférence !
■ ***Combien de figures différentes peut-on alors obtenir en joignant les six points deux à deux) ?***



11.18 Polygones réguliers

Parmi les polygones à plus de quatre côtés, il faut surtout connaître les polygones réguliers, c'est-à-dire ceux dont tous les côtés ont même mesure et dont tous les angles sont égaux.



DU CASSE-TÊTE CHINOIS À LA GÉOMÉTRIE

Le To Dong est un illustre jeu de puzzle extrême-oriental.

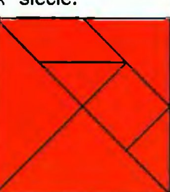
Fabriquez-vous un jeu de pièces en carton reproduisant fidèlement le découpage en 7 pièces d'un rectangle comme ci-contre. Il y a 2 triangles isocèles rectangles, 4 trapèzes rectangles et un pentagone muni de trois angles droits et d'un axe de symétrie.

■ ***Saurez-vous reconstituer notre kangourou ?***

Le Tan Gram

Le Tan Gram est un autre casse-tête chinois bien connu au XIXe siècle.

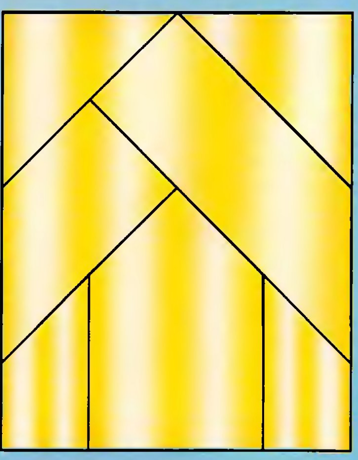
Voici le plan permettant de reconstituer les pièces de ce puzzle.



Aurez-vous la malice de reconstituer les figures représentées sur ces cartes ?



Le To Dong, casse-tête chinois



Kangourou To Dong

LES POLYGONES RÉGULIERS DANS LES SALLES DE BAIN

Un décorateur veut carreler les murs d'une salle de bain avec des carreaux identiques en forme de polygones réguliers de manière que les assemblages soient identiques en chaque point de chaque carreau. Il n'y a pas trente-six solutions. Il y en a exactement trois !
Les mathématiques viennent aider le décorateur dans sa quête d'esthétique répétitive.

Les angles des polygones

Si un polygone régulier a n côtés, alors l'angle en degrés de deux côtés consécutifs est

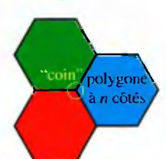
$$180 \times \left(\frac{n-2}{n}\right).$$

Vérifiez-le pour $n = 3, 4, 5, 6, 7$ et 8.

La relation d'assemblage

Supposons qu'en un "coin" p carreaux viennent s'assembler.

Montrer que $\frac{1}{p} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2}$.



C. Q. F. D.

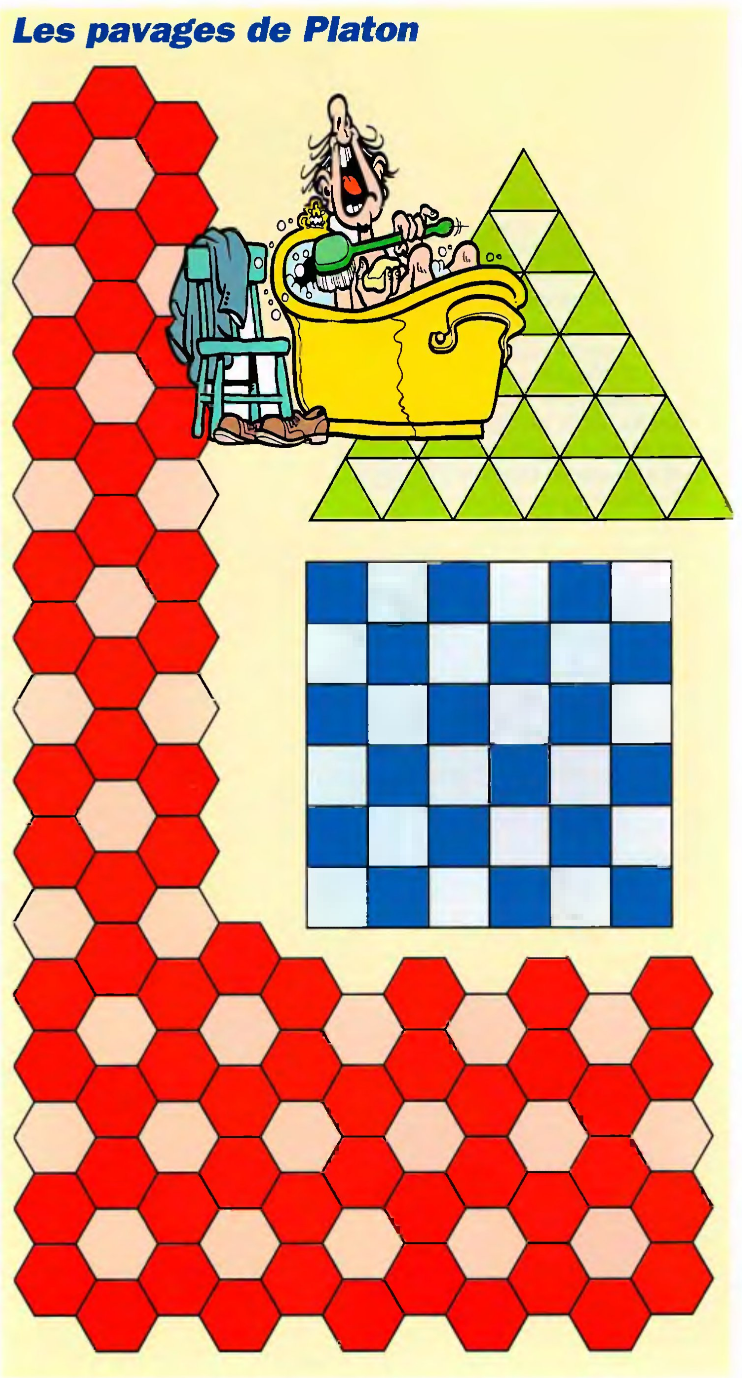
■ Pourquoi p et n valent-ils au moins 3 ? Montrer que p et n ne peuvent pas être tous les deux plus grands que 4.

En déduire toutes les valeurs possibles de n et p.

Conclure.

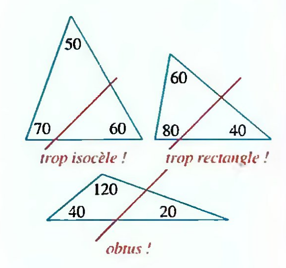
On reparle de Platon à la page 146.

Les pavages de Platon



À LA RECHERCHE DU TRIANGLE VRAIMENT QUELCONQUE

Quiconque a essayé de tracer un triangle quelconque s'en est aperçu : il a toujours l'air un peu particulier. Comment s'y prendre ? (On ne veut pas que le triangle quelconque ait un angle obtus.)



Les contraintes

Appelons α, β, γ les trois angles d'un triangle dans l'ordre de leur grandeur. On doit déjà avoir en degrés :

$$\gamma < \beta < \alpha < 180°$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°.$$

Ce qu'il faut c'est que les différences $90 - \alpha$, $\alpha - \beta$ et $\beta - \gamma$ soient les plus grandes possibles.

Si γ est plus grand que 45°...

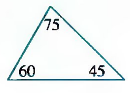
Montrer que l'une au moins des trois différences est inférieure ou égale à 15.

Si γ est plus petit que 45°...

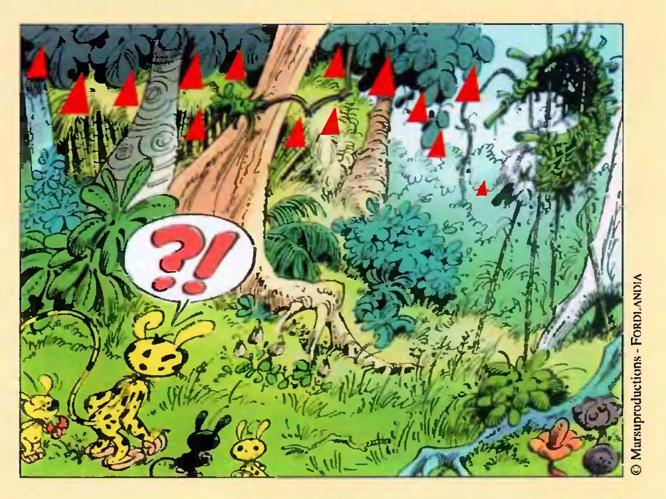
... alors $\alpha + \beta$ est plus grand que 135 ; et si on veut que α soit plus petit que 75°, alors il faut que β soit plus grand que 60°. Et alors...

La conclusion s'impose

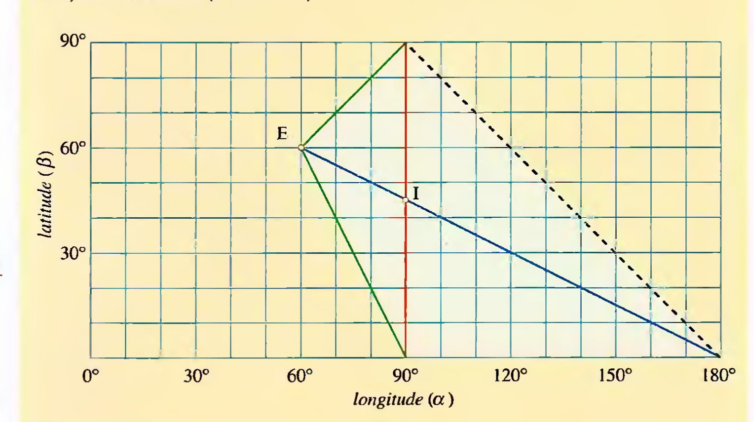
À quinze degrés près, le triangle quelconque (avec trois angles aigus) est absolument unique !



La jungle des triangles



Dans la profonde forêt trigonale qui recouvre une grande partie de l'astéroïde ABC 90, le marsupilami et sa famille sont un peu perdus.
Heureusement, ils possèdent une carte indiquant précisément les longitudes (de 0° à 180°) et les latitudes (de 0° à 90°).



Fait extraordinaire : l'arbre qui pousse à l'endroit de longitude α et de latitude β porte des fruits en forme de triangles tous semblables : le plus grand angle de ce triangle mesure α°, un autre angle mesure β° et le troisième $(180 - \alpha - \beta)$°.
De quelle sorte sont les triangles des arbres poussant sur la ligne tracée en rouge sur la carte ?
Et en bleu ?
Et en vert ?
Et au point E ?
Et au point I ?
Quelles sont les limites de cette forêt ?
Où peut se trouver le fameux triangle quelconque ?

Test 11

Pour chacune des 10 questions, indiquer la ou les bonnes réponses parmi A, B, C, D ou E

	Questions	A	B	C	D	E
1	La droite bleue est une hauteur dans le triangle…					
2	La droite bleue est une médiatrice dans le triangle…					
3	Ont toujours un cercle circonscrit…	les triangles rectangles	les rectangles	les losanges	les parallélogrammes	les trapèzes
4	Dans le dessin d'un rectangle avec ses diagonales, on voit exactement…	1 triangle rectangle	2 triangles rectangles	3 triangles rectangles	4 triangles rectangles	5 triangles rectangles
5	Dans un cube, trois sommets d'une même face forment un triangle…	rectangle	isocèle	équilatéral	quelconque	non isocèle
6	Dans quel(s) cas le triangle coloré est-il rectangle ?					
7	Tous les troisièmes sommets d'un triangle rectangle d'hypoténuse donnée sont…	sur un demi-cercle	sur une droite	sur un cercle	sur une demi-droite	sur un segment
8	Le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, rectangle en A, est…	A	le point de concours des médianes	le milieu de [AB]	le point de concours des médiatrices	le milieu de [BC]
9	Si ABCD est un losange…	BCDA est un losange	ABDC est un losange	DCBA est un losange	BCAD est un losange	ABCD est un parallélogramme
10	Un trapèze peut avoir exactement…	4 angles droits	3 angles droits	2 angles droits	1 angle droit	aucun angle droit

THÈME 12

La tête dans les étoiles

Trois mille ans avant J.-C. dans les vallées fertiles du Tigre et de l'Euphrate, les astronomes babyloniens regardaient le ciel. C'est pour repérer les étoiles qu'ils s'intéressaient aux angles et à leur mesure. Et comme il était facile de diviser un angle en 6, ils utilisèrent beaucoup le nombre 6 × 10 (soixante) et placèrent 6 fois plus encore de degrés (360) dans un cercle : c'est l'origine des mesures "sexagésimales" (angle, temps...).

Angles et trigonométrie

Angle : du latin *angulus*, venant du grec *gonos* qui a aussi donné ***genou***.
Trigonométrie : du grec *metron* "mesure", et *gonos*, "angle". Le préfixe *tri* précise que la trigonométrie s'occupe des mesures des figures formées avec "trois" angles : les triangles.

- **Mesurer des angles**
La liaison entre les longueurs d'arcs de cercle et les mesures des angles donne naissance à une nouvelle unité : le radian. Et l'inscription des angles dans le cercle révèle une fantastique propriété géométrique.

- **Les angles dans les figures**
Certaines configurations géométriques (triangles, quadrilatères, couples de droites) présentent des symétries ou des parallélismes. Des angles égaux s'y reconnaissent et certaines mesures d'angles méritent de rester gravées dans les mémoires.

- **Rapports entre les côtés d'un triangle rectangle**
Les quotients des mesures des côtés d'un triangle rectangle ont des noms bizarres : sinus, cosinus, tangente, qui cachent des idées simples.

Les angles à la loupe

Il y a des petits angles comme par exemple l'angle de 1°. Sur un cercle d'un peu moins de 6 cm de rayon, un tel angle intercepte un arc de 1 millimètre de longueur. C'est aussi celui sous lequel on voit la Lune depuis notre Terre. Ou bien celui sous lequel on voit son petit doigt au bout de son bras tendu.

1°

5,73 cm

Ces phrases expriment, à leur manière, certains rapports existant entre des mesures : 1 mm et 57,3 mm ; 700 km (diamètre de la Lune) et 400 000 km (sa distance à la Terre) ; 1,4 cm (épaisseur d'un petit doigt) et 80 cm (distance œil-bout du bras). Saurez-vous préciser ces rapports ?

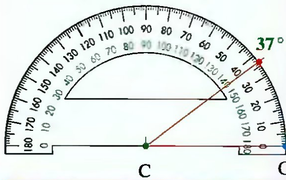
Une autre question est la suivante : "En regardant un petit angle à la loupe voit-on un angle plus grand ?".

La réponse est "non" !, comme on peut le constater sans peine.

Et heureusement, sans quoi un architecte ne pourrait pas dessiner le plan d'une maison "à l'échelle".



Le bon usage du rapporteur
- *Le centre du rapporteur doit être sur le sommet de l'angle.*
- *Un zéro du rapporteur doit être sur un côté de l'angle.*
- *Lire la graduation qui correspond à ce zéro.*



MESURER DES ANGLES

12. 1 L'ouverture de l'angle

L'unité usuelle de mesure des angles est le degré.

L'instrument de mesure des angles est le rapporteur.

Quelques points de repère suffisent à éviter les erreurs grossières.

Il faut retenir les valeurs des angles particuliers rappelées dans la frise ci-dessous, et avant d'évaluer un angle, chercher toujours dans quelle "zone" il se trouve :

moins de 90°(angle aigu),

entre 90° et 180°(angle obtus),

plus de 180°(angle rentrant).

angle nul	angle aigu	angle droit	angle obtus	angle plat	angle rentrant	angle plein
$a = 0°$	$0° < a < 90°$	$a = 90°$	$90° < a < 180°$	$a = 180°$	$180° < a < 360°$	$a = 360°$

Il y a proportionnalité entre les mesures en radian et les mesures en degré d'un même arc :

2π radians ↔ 360°

π radians ↔ 180°

1 radian ↔ $\frac{180°}{\pi} \approx 57{,}3°$

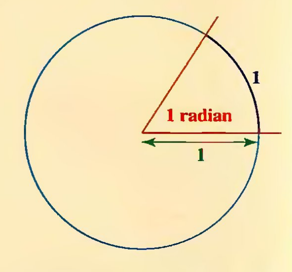
$0{,}017 \approx \frac{\pi}{180}$ radian ↔ 1°

π/2 π/3 π/4 π/6 π

12. 2 Une autre unité d'angle : le radian

Une idée assez naturelle pour mesurer des angles est de tracer un cercle de rayon 1 ayant pour centre le sommet de l'angle. On associe alors à l'angle la longueur de l'arc de cercle intercepté.

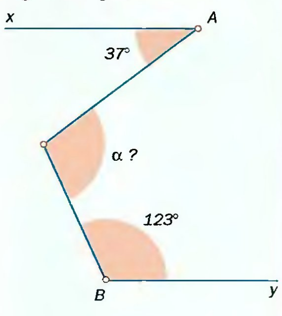
Un angle de 1 radian est un angle interceptant un arc de longueur 1 sur un cercle de rayon 1.



Procéder ainsi possède un tas d'avantages, ne serait-ce que pour la simplicité du procédé de définition.
Évidemment, surtout au début, cela présente l'inconvénient suivant : les longueurs d'arc de cercle se calculent en utilisant le nombre π.
Ainsi, le cercle complet de rayon 1 a une longueur de 2π unités. La mesure en radians de l'angle plein (360°) est donc 2π radians. De même l'angle droit mesure $\pi/2$ radians. Mais on s'habitue très vite à la présence de tous ces π dans les mesures d'angles.

degrés	30	45	60	90	180	360
radians	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π

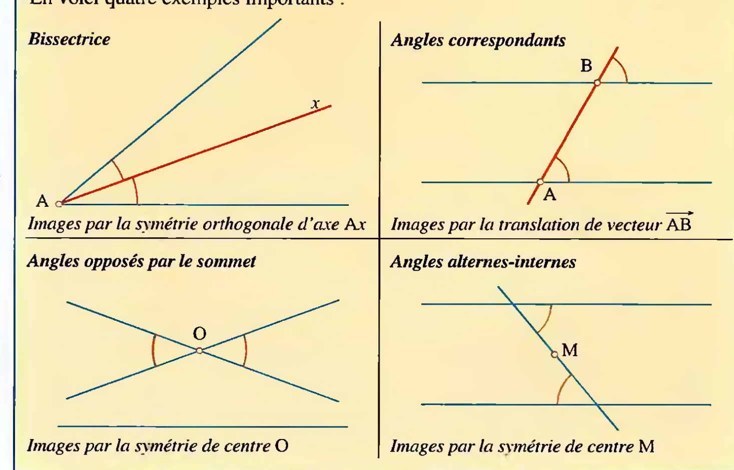
Chercher l'astuce
Sachant que les demi-droites Ax et By sont parallèles, trouvez la mesure en degré de l'angle α.



12. 3 Angles égaux

Les symétries orthogonales et centrales, la translation et la rotation ont en commun une importante propriété : elles conservent les angles, c'est-à-dire que l'image d'un angle est un angle de même mesure. Il faut savoir reconnaître les configurations classiques où apparaissent des angles qui sont images l'un de l'autre dans une de ces transformations, et qui sont alors égaux.

En voici quatre exemples importants :

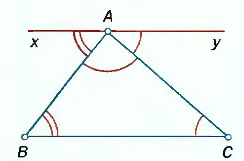


Images par la symétrie orthogonale d'axe Ax

Images par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$

Images par la symétrie de centre O

Images par la symétrie de centre M



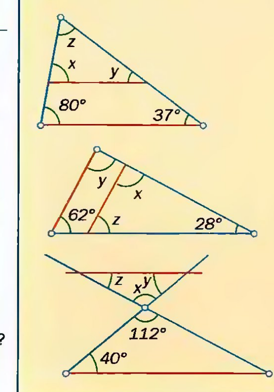
12. 4 Angles et triangles

La somme des mesures des trois angles d'un triangle est 180°.

Cette propriété peut se démontrer à partir de la figure en marge.
On trace xy parallèle à (BC) passant par A.
$\widehat{xAB} = \widehat{B}$; $\widehat{yAC} = \widehat{C}$ (angles alternes-internes).
$\widehat{xAB} + \widehat{A} + \widehat{yAC} = 180°$, donc $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180°$.

EXEMPLES

Dans chaque figure, calculer les angles x, y, z (les droites en rouge sont parallèles).

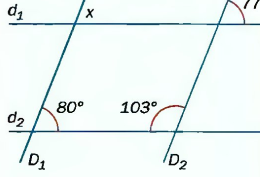


$x = 80°$ (angles correspondants)
$y = 37°$ (angles correspondants)
$x + y + z = 180°$, d'où $z = 63°$.

$x = y$ (angles correspondants)
$z = 62°$ (angles correspondants)
$x + 28° + z = 180°$, d'où $x = 90°$. Et $y = 90°$.

$x = 112°$ (angles opposés par le sommet)
$y = 40°$ (angles alternes-internes)
$112° + 40° + z = 180°$, d'où $z = 28°$.

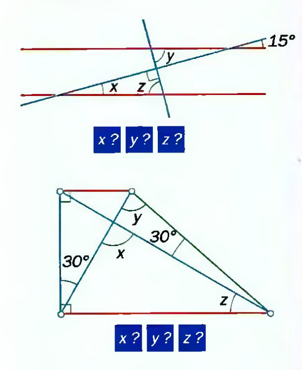
Parallèles ?



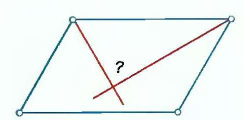
Vrai ou faux ?
Avec les données marquées sur la figure, d_1 et d_2 sont-elles parallèles ? D_1 et D_2 sont-elles parallèles ?

x mesure-t-il 80° ou 77° ?

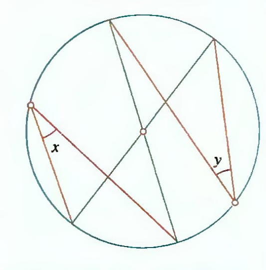
Angles à calculer
Calculer les angles x, y z. Les droites en rouge sont parallèles.



Les audaces de X. Y.
X. Y. brillant élève de collège tenant à garder un bien compréhensible anonymat vient d'énoncer une audacieuse conjecture : Les bissectrices de deux angles consécutifs d'un parallélogramme sont perpendiculaires.
"Et je sais la démontrer", ajoute X. Y.
Qu'en pensez-vous ?

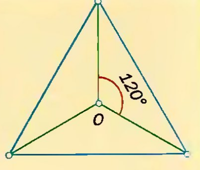


Affaire à rebondissements



Saurlez-vous démontrer que les angles x et y sont égaux ?

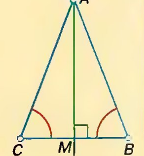
ANGLES DANS LES FIGURES



12. 5 Triangle équilatéral

Les angles d'un triangle équilatéral sont égaux et mesurent donc chacun 60° (et ceci est une propriété caractéristique).

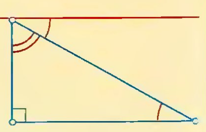
Chaque angle du triangle est image de celui d'à côté dans une rotation de centre O et d'angle 120°



12. 6 Triangle isocèle

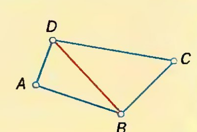
Deux des angles d'un triangle isocèle sont égaux (et ceci est une propriété caractéristique).

Les angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ sont images dans la symétrie orthogonale d'axe (AM).



12. 7 Triangle rectangle

Les angles aigus d'un triangle rectangle mesurent 90° à eux-deux. On les dit complémentaires.



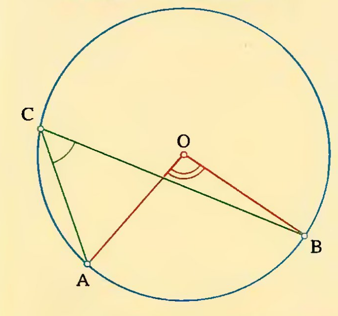
12. 8 Angles et quadrilatères

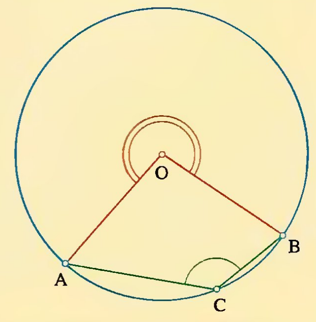
La somme des mesures des quatre angles d'un quadrilatère est 360°.

Le quadrilatère ABCD peut se découper en deux triangles ABD et BCD. Les angles du quadrilatère se retrouvent exactement (parfois en deux morceaux) dans ces deux triangles.

12. 9 Angles et cercles

A et B sont deux points situés sur un cercle de centre O.
Le point C est aussi un point du cercle.
L'angle $\widehat{ACB}$ dit "angle *inscrit*" est celui qui intercepte l'arc AB qui ne contient pas C. L'angle de sommet 0, interceptant le même arc est l'*angle au centre* correspondant.





Voici un remarquable résultat connu sous le nom de "théorème de l'angle inscrit" :

12. 10 Théorème de l'angle Inscrit

La mesure d'un angle inscrit est la moitié de la mesure de l'angle au centre interceptant le même arc.

Conséquence immédiate : tous les angles inscrits interceptant le même arc ont la même mesure.

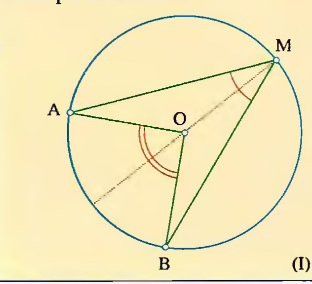


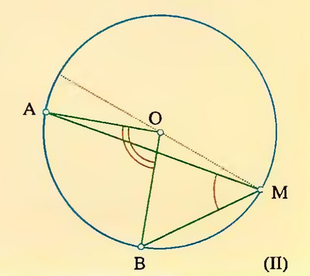
12.11 Une belle démonstration

La démonstration du théorème de l'angle inscrit est assez simple dans le cas où l'angle inscrit et l'angle au centre ont un côté commun.

Lorsque (MA) = (OA), on a en effet :
$2\ \widehat{AMB} + \widehat{BOM} = 180°$, dans le triangle isocèle OMB.
$\widehat{AOB} + \widehat{BOM} = 180°$, puisque M, O et A sont alignés.
On a donc bien $2\ \widehat{AMB} = \widehat{AOB}$.

Dans les autres cas de figure, il faut être malin et se ramener au cas précédent.
- Lorsque le diamètre (MO) passe à l'intérieur de $\widehat{AOB}$, comme dans (I), il faut procéder par addition.
- Lorsque le diamètre (MO) passe à l'extérieur de $\widehat{AOB}$, comme dans (II), il faut procéder par soustraction.





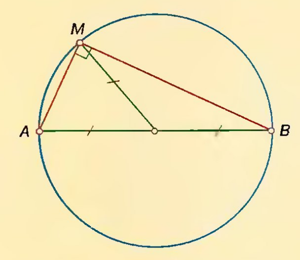
12.12 Le théorème de l'angle droit

On dit que ce théorème fut le premier théorème énoncé dans l'histoire des mathématiques. Il aurait été démontré par Thalès plus de 5 siècles avant J.-C.

Lorsque l'arc de cercle intercepté est un demi-cercle, l'angle au centre mesure 180° et donc tout angle inscrit interceptant un demi-cercle est un angle droit. Ce résultat est aussi appellé "énoncé du triangle rectangle" :

Si un point M appartient au cercle de diamètre [AB], alors le triangle AMB est rectangle en M.

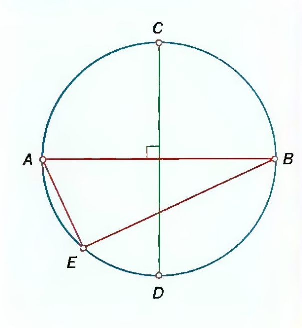
La réciproque de ce théorème est vraie aussi : si le triangle AMB est rectangle en M, alors M appartient au cercle de diamètre [AB].

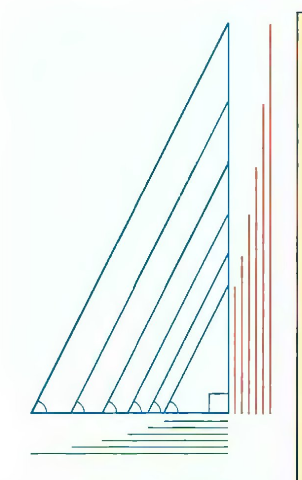


Autrement dit : le centre du cercle circonscrit à un triangle rectangle est le milieu de son hypoténuse.
Autrement dit encore : la médiane issue de l'angle droit dans un triangle rectangle mesure la moitié de l'hypoténuse.

Voir en **9.15** et **11.4** cet énoncé dans d'autres contextes.

Bissectrices
[AB] et [CD] sont deux diamètres perpendiculaires d'un cercle. E est un point de ce cercle.
■ ***Pouvez-vous, sans compas ni rapporteur, tracer la bissectrice de l'angle $\widehat{AEB}$? Et celle de $\widehat{CED}$?***





Dans un triangle ABC rectangle en A

$\sin \widehat{B} = \frac{AC}{BC}$ $\cos \widehat{B} = \frac{AB}{BC}$

$\tan \widehat{B} = \frac{AC}{AB}$.

RAPPORTS ENTRE LES CÔTÉS D'UN TRIANGLE RECTANGLE

Attention, tout ce qui suit se passe impérativement dans un triangle rectangle!

ABC est rectangle en A. [BC] est l'hypoténuse, [AB] est le côté adjacent à B ; [AC] est le côté opposé à B.

Les expressions "côté" ou "hypoténuse" désignent, suivant le contexte, les segments ou les longueurs de ces segments.

12.13 Rapports des côtés

Dans un triangle ABC rectangle en A, l'angle aigu $\widehat{B}$ ne dépend que des rapports des longueurs des côtés du triangle.

On a décidé de donner un nom à ses rapports de longueurs.

12.14 Sinus

Le sinus de l'angle $\widehat{B}$ est le nom donné au quotient du côté opposé à B par l'hypoténuse.

12.15 Cosinus

Le cosinus de l'angle $\widehat{B}$ est le nom donné au quotient du côté adjacent à B par l'hypoténuse.

12.16 Tangente

La tangente de l'angle $\widehat{B}$ est le nom donné au quotient du côté opposé à B



12.17 Mnénotechnie

Les cosinus, sinus et tangente sont des quotients de longueurs, appelés **rapports trigonométriques**.
Pour ne pas les confondre, des générations ont appris les phrases suivantes :

cosinus = côté adjacent sur hypoténuse
sinus = côté opposé sur hypoténuse
tangente = côté opposé sur côté adjacent

Ces phrases bizarres, qui ne veulent pas dire grand chose, sont, dieu sait pourquoi, facilement mémorisables!
On peut aussi se souvenir que les rapports trigonométriques sont les coefficients multiplicateurs faisant passer de la longueur d'un côté à celle d'un autre (voir en marge).

12.18 Novotechnie

Pour connaître le sinus, le cosinus ou la tangente d'un angle, par exemple 37°, il suffit aujourd'hui de frapper 3 7 sin sur sa calculatrice et elle affiche 0,6018…

Attention, simplement, **aux unités d'angles** : une touche deg/rad, change généralement l'une en l'autre, puis le calcul s'affiche sur l'écran.

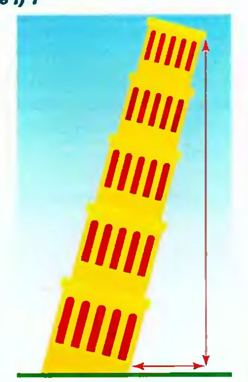
Inversement pour connaitre, l'angle dont on connaît le sinus, par exemple 0,6018, il faut taper quelque chose comme inv sin, la touche inv étant généralement en couleur sur le clavier.



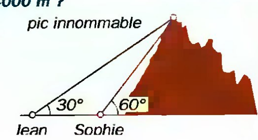
Paradis inaccessible
J'ai mon brevet de 200 m nage libre, mais cette île déserte me paraît bien loin. "Facile" me dit mon ami. "Il suffit d'un petit calcul." Muni de son "goniomètre" il se place en un point A du rivage et parcourt 45 m dans la direction orthogonale à (AC). Il arrive en B et détermine par une nouvelle visée l'angle $\widehat{ABC}$: il trouve 75°.
■ **Alors, ce paradis m'est-il accessible ?**



La tour de Pise
La tour de Pise mesure 55 m de haut. Elle fait actuellement un angle de 85° avec l'horizontale.
■ **À quelle distance du pied de la tour s'écrasera l'appareil photo qu'un touriste imprudent a par mégarde laissé tomber d'en haut (et du mauvais côté !) ?**



Tangent
Jean voit le pic Innommable sous un angle de 30°. Sophie de l'autre côté de la vallée, à 2 km de Jean, le voit sous un angle de 60°. Tout deux sont déjà à une altitude de 2000 m.
■ **Le pic Innommable dépasse-t-il les 4000 m ?**

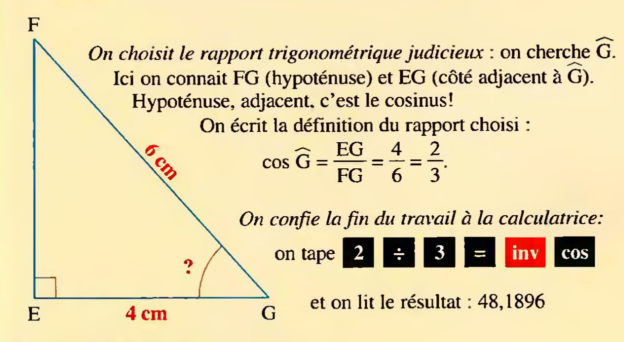


12.19 Un exemple-type : calculer un angle

Dans le triangle EFG rectangle en E, on donne FG = 6 cm et EG = 4 cm.

Combien mesure l'angle $\widehat{G}$?

On fait un schéma (pas nécessairement aux vraies mesures)



On choisit le rapport trigonométrique judicieux : on cherche $\widehat{G}$.
Ici on connait FG (hypoténuse) et EG (côté adjacent à $\widehat{G}$).
Hypoténuse, adjacent, c'est le cosinus!
On écrit la définition du rapport choisi :

$$\cos \widehat{G} = \frac{EG}{FG} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

On confie la fin du travail à la calculatrice:
on tape **2** **÷** **3** **=** **inv** **cos**
et on lit le résultat : 48,1896

On répond à la question : G ≈ 48°.

AUTRE PROBLÈME :
■ Combien vaut l'angle α ?



12.20 Un exemple-type : calculer un côté

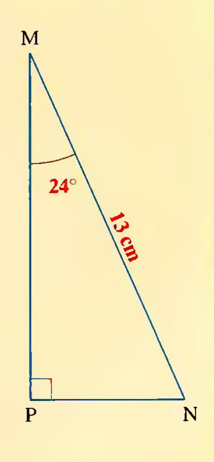
Dans le triangle MNP rectangle en P, on donne MN = 13 cm et M = 24°.

Calculer NP.

On fait un schéma (pas nécessairement aux vraies mesures).

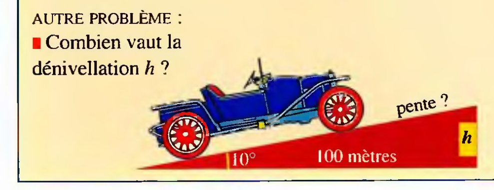
On choisit le rapport trigonométrique judicieux : On connaît $\widehat{M}$. On connaît MN (l'hypoténuse) et on cherche NP (le côté opposé à M).
Côté opposé, hypoténuse, c'est le sinus!
On écrit la définition du rapport choisi :

$$\sin \widehat{M} = \frac{NP}{MN} \text{ donc } NP = MN \times \sin \widehat{M} = 13 \times \sin 24°$$

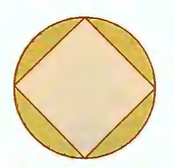


On confie la fin du travail à la calculatrice:
on tape **1** **3** **×** **(** **2** **4** **sin** **)** **=**
et on lit le résultat : 5,2875…
On répond à la question : NP ≈ 5,3 cm.

AUTRE PROBLÈME :
■ Combien vaut la dénivellation h ?



Équarrir est le propre de l'homme
Un arbre circulaire de 1 m de diamètre, 10 m de long est d'abord transformé en une poutre de section carrée (on l'a "équarri") avant d'être débité en planches de 3 cm d'épaisseur.
"Si les troncs d'arbre étaient parallélépipédiques et non cylindriques, je ne perdrais pas 10 % du volume total" prétend le propriétaire de la scierie.
■ ***Faut-il lui donner raison ?***



12.21 Propriétés des rapports trigonométriques

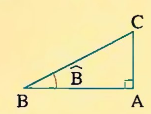
Quel que soit l'angle aigu $\widehat{B}$ du triangle ABC rectangle en A :

(1) $0 \leq \sin \widehat{B} \leq 1$

(2) $0 \leq \cos \widehat{B} \leq 1$

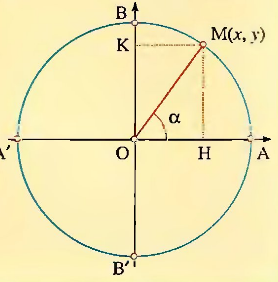
(3) $(\sin \widehat{B})^2 + (\cos \widehat{B})^2 = 1$

(4) $\tan \widehat{B} = \dfrac{\sin \widehat{B}}{\cos \widehat{B}}$.

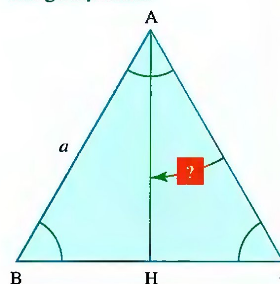


Les propriétés (1) et (2) sont la conséquence du fait que, dans un triangle rectangle, l'hypoténuse est le plus grand côté.
La propriété (3) est la simple écriture de l'énoncé de Pythagore dans le triangle rectangle ABC ($BC^2 = AB^2 + AC^2$), dans laquelle on a remplacé AB par BC $\cos \widehat{B}$ et AC par BC $\sin \widehat{B}$, puis simplifié par BC^2.
Enfin la propriété (4) est la conséquence directe des définitions données des fonctions sinus, cosinus et tangente.

Soit le cercle de centre O et de rayon 1. Deux axes perpendiculaires, concourant en O coupent respectivement le cercle en A′, A et B′, B. Soit M le point du cercle ayant pour coordonnées (x, y) dans le repère (O, OA, OB).
M se projette en H sur (OA) et en K sur (OB).
Soit α une mesure de l'angle $\widehat{AOM}$.
On a $x^2 + y^2 = 1$, puisque OM = 1, et
OH = $\cos \alpha$ et OK = $\sin \alpha$.



Triangle équilatéral

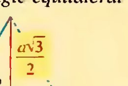


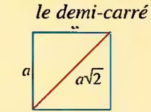
■ ***Quel est le coefficient multiplicatif faisant passer du côté à la hauteur d'un triangle équilatéral ?***

12.22 Rapports trigonométriques d'angles particuliers

Le tableau ci-dessous résume les valeurs exactes des rapports trigonométriques d'angles particuliers. Ces valeurs proviennent de l'utilisation des définitions, des propriétés énoncées ci-dessus et de la connaissance des deux configurations ci-dessous :

le demi-triangle équilatéral — *le demi-carré*





Il existe un truc rigolo pour savoir reproduire le tableau si on l'a oublié ; ce truc, indiqué en bleu, passe par deux lignes faciles à écrire.

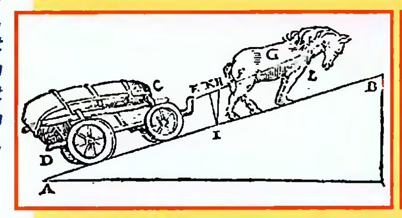
angle	0°	30°	45°	60°	90°	
	0	1	2	3	4	√•
	0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2	1\2
sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	ordre inverse
cosinus	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	
tangente	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	non défini	$\frac{\sin}{\cos}$

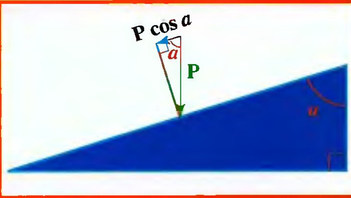
PENTE, COSINUS ET TANGENTE

Il est plus difficile de monter des objets à la verticale que de monter les mêmes objets sur une pente régulière : c'est le cosinus qui joue ici. Mais une pente est d'autant plus raide que son angle avec l'horizontale est plus élevé : c'est la tangente qui joue alors.

La merveilleuse figure de Stevin

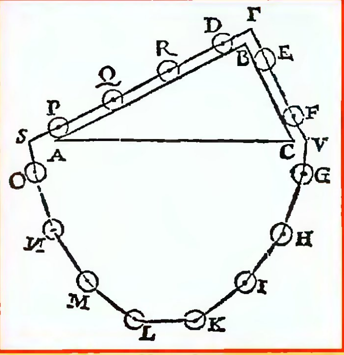
Le texte ci-dessous est un extrait du magnifique ***Livre de la Statique*** édité par l'ingénieur hollandais **Simon Stevin** en 1585.
Il y calcule que pour traîner un poids P sur une route montant d'un angle de $(90 - a)°$, il faut exercer une force égale à P cos a (en plus de celle nécessaire sur une route horizontale).



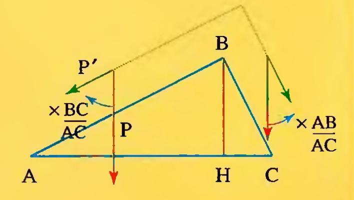


Comment Simon Stevin explique-t-il cette propriété ? Grâce à une figure qu'il qualifie de *merveilleuse* par la simplicité et la profondeur de ce qu'elle montre à un œil astucieux, et que voici :

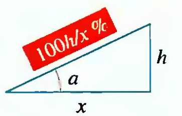
« *Soit aussi posée IH quadruple à HK, il appert que comme KH à HI, ainsi le poids de la balance oblique (s'il y en avoit une au lieu du cheval), au poids du chariot ; mais KH est le quart de HI ; le poids donc de la balance oblique seroit de 500 livres, qui est le 1/4 de la pesanteur du chariot : Et ainsi la pesanteur du chariot cause un tel pressement contre la poitrine du cheval L, qu'un fardeau de 500 livres sur son dos le presseroit, & cela (c'est assavoir quand il marche) par dessus ce qu'il est pressé en tirant le chariot en rase campagne.* »



À ceux qui regardent sans voir, Stevin pose la question suivante : « Pourquoi le collier, ainsi posé sur la pointe d'un angle ne se met-il pas à tourner ? »
La réponse est que la force sur la corde le long de AB est exactement compensée par la force sur la corde le long de BC. Comme les poids des morceaux de collier sont proportionnels aux longueurs AB et BC, c'est donc qu'ils doivent être multipliés respectivement par BC et AB pour donner des forces égales.
Il y a aussi égalité lorsqu'on multiplie AB par $\frac{BC}{AC}$ et BC par $\frac{AB}{AC}$, c'est donc bien par le cosinus de l'angle que fait la pente avec la verticale que le poids est multiplié (aux unités près, bien entendu !).



■ **Suivre la pente**
Une pente à p %, fait un angle a avec l'horizontale tel que
tan a = p/100.



À quel angle correspond une pente de 45 % ?
Quel est le pourcentage d'une pente à 45° ?



Test 12

Pour chacune des 10 questions, indiquer la ou les bonnes réponses parmi A, B, C, D ou E

	Questions	A	B	C	D	E
1	Dans quel cas l'égalité est-elle vraie ? (A, B, C, D, E, F, O)	$\widehat{AOC} = 120°$	$\widehat{ABC} = 60°$	$\widehat{FBD} = 60°$	$\widehat{ACE} = 90°$	$\widehat{FEC} = 90°$
2	(A, B, I, C) $\widehat{ABC} = 90°$ $\widehat{BCA} = 30°$	$\widehat{AIB} = 60°$	$\widehat{AIB} = \widehat{AIC}$	$\widehat{IAC} = \widehat{ACI}$	$\widehat{AIC} = 30°$	$\widehat{AIC} = 130°$
3	(A, B, C, D, E, F, G, H) Sur le cube, l'angle $\widehat{FGD}$ mesure…	45°	60°	90°	120°	impossible de le savoir
4	(102°, a) L'angle a mesure…	51°	(90 – 51)°	(180 – 51)°	49°	39°
5	(A, B, O, C, E) AB = OA Où y a-t-il une phrase vraie ?	$\widehat{OAB} = 60°$	$\widehat{AEB} = 30°$	$\widehat{ABE} = 90°$	$\widehat{BAC} = 90°$	$\widehat{ACB} = 30°$
6	sin 30° , c'est aussi…	(sin 30°) ÷ 2	1 – sin 30°	cos 60°	2 sin 15°	l'inverse de 1 + 1
7	$\cos \widehat{E} = \frac{EF}{EG}$. Quelles figures conviennent ?	(F, E, G)	(G, F, E)	(G, E, F)	(G, E, F)	(E, F, G)
8	cos 60° , c'est aussi…	2 × cos 30°	cos(2 × 30°)	0,5	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1 – cos 60°
9	(30°, x, 10 cm) x mesure en centimètres :	10 sin 30°	10 tan 30°	10 cos 30°	5	$\frac{10}{\sqrt{3}}$
10	Le sinus d'un angle est égal à son cosinus.	C'est 90°	C'est impossible	C'est 30°	C'est 45°	C'est l'angle nul

THÈME 13

De l'espace en perspective

Représenter sur un plan (paroi d'une grotte, mur, toile, feuille de papier) le monde environnant a été de tout temps un souci de l'humanité. Les artistes de la Renaissance, essentiellement les Italiens au XVe siècle, ont fait dans ce domaine un grand pas en dégageant les règles de la "perspective". Les mathématiciens s'en sont mêlés eux-aussi et ont précisé les conventions de ce type de représentation.

Les objets de l'espace

Perspective : du verbe latin *spectare*, observer, voir et du préfixe *per* (à travers) ; dessiner en perspective, c'est arriver à voir la structure même d'un objet de l'espace.

Les polyèdres

Certains objets, plein d'assurance, s'élèvent droits au-dessus de leur base. Ce sont les prismes. D'autres, plus timides, rétrécissent pour occuper moins d'espace. Ce sont les pyramides.

Les objets ronds

La sphère est un modèle de régularité, le cylindre, massif, évoque le rouleau compresseur, quant au cône, attention, ne vous y piquez pas.

Mesurer les objets

Dans les solides simples de ce chapitre, il y a beaucoup d'angles droits. L'énoncé de Pythagore intervient largement pour calculer les liens entre les différentes longueurs présentes.

Décrire et représenter un objet

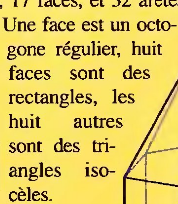
POUR UN JEUNE MATHÉMATICIEN DU COLLÈGE, étudier un objet de l'espace (un "solide"), c'est être capable :

— *de le représenter avec les conventions de la perspective cavalière.*

Ici, la base octogonale, vue en perspective cavalière n'est pas représentée par un octogone régulier, mais par un octogone dont les côtés sont deux à deux parallèles. En effet cette représentation respecte le parallélisme des droites mais ne respecte pas la plupart des longueurs et des angles.

— *de le décrire avec des mots du vocabulaire mathématique.*

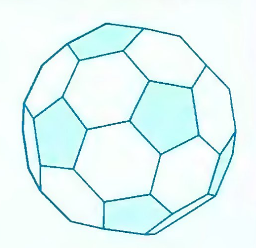
Cet "objet" possède 17 sommets, 17 faces, et 32 arêtes.



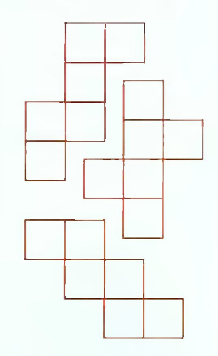
Une face est un octogone régulier, huit faces sont des rectangles, les huit autres sont des triangles isocèles.

— *d'en dessiner un "développement"* (appelé aussi "patron") qui permet de le construire en assemblant des polygones.

Polyèdre
Polyèdre vient du grec poly (plusieurs) et edron (face).
Le polyèdre représenté ci-dessous a 32 faces (12 pentagones et 20 hexagones), 60 sommets et 90 arêtes !



Patrons
Voici trois exemples de patrons de cube. Chercher en d'autres, sachant qu'il en existe 11 différents.



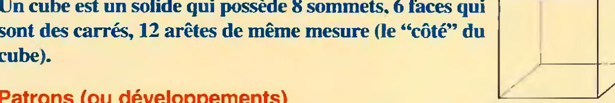
Friandises
Il faut être capable de reconnaître un prisme aussi bien quand il est "posé" sur une de ses bases que sur une face rectangulaire.



LES POLYÈDRES

13. 1 Polyèdre

Un polyèdre est un solide entièrement limité par des polygones plans (les *faces* du polyèdre), assemblées le long de leurs côtés (les *arêtes* du polyèdre) ; les sommets des faces polygonales sont les *sommets* du polyèdre.



13. 2 Cube

Un cube est un solide qui possède 8 sommets, 6 faces qui sont des carrés, 12 arêtes de même mesure (le "côté" du cube).

13. 3 Patrons (ou développements)

Un patron de polyèdre est une figure plane d'un seul tenant, obtenue en découpant certaines arêtes de manière à pouvoir "étaler" toutes les faces sur un plan. Par collage d'arêtes, on peut alors reconstituer le polyèdre.

Voici un exemple de patron de cube.

13. 4 Parallélépipède rectangle ou pavé droit

Un pavé droit est un solide qui possède 8 sommets, 6 faces qui sont des rectangles, et 12 arêtes qui ont quatre par quatre la même mesure. Les trois nombres qui mesurent les arêtes sont appelés la longueur, la largeur et la hauteur du pavé droit.



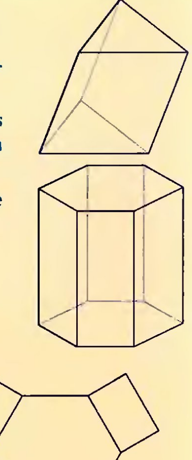
13. 5 Prisme droit

Un prisme est un solide qui possède :

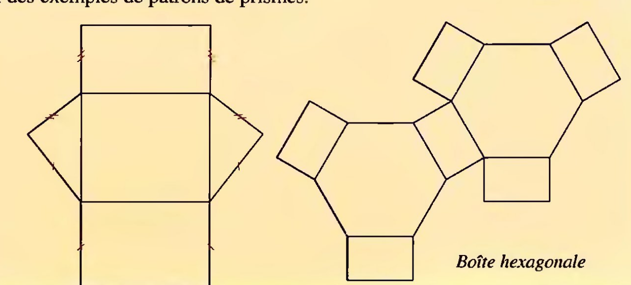
— deux faces polygonales parallèles et superposables, les *bases* du prisme.

— des faces appelées *faces "latérales"* qui sont des parallélogrammes. Il y en a autant que de côtés au polygone de base.

Un prisme droit est un prisme dont les plans de base sont perpendiculaires aux faces latérales.



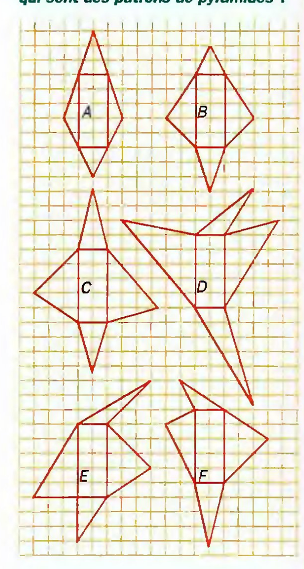
Voici des exemples de patrons de prismes.



Boîte hexagonale

Un bon patron

Parmi ces figures, quelles sont celles qui sont des patrons de pyramides ?



13. 6 Pyramides

Une pyramide est un solide qui possède :

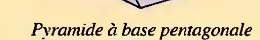
— une face polygonale, la "base" de la pyramide.

— un sommet particulier, "le" sommet de la pyramide.

— deux catégories d'arêtes : les arêtes de base (ce sont les côtés du polygone de base) et les arêtes latérales (qui partent du sommet de la pyramide).

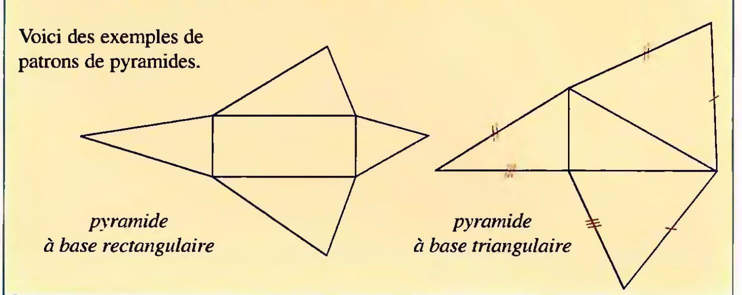
— les faces autres que la base sont des triangles.

le sommet
une arête latérale
la base
une arête de base



Pyramide à base pentagonale

Voici des exemples de patrons de pyramides.



pyramide à base rectangulaire

pyramide à base triangulaire

13. 7 Pyramide régulière

Une pyramide est régulière quand :

— sa base est un polygone régulier.

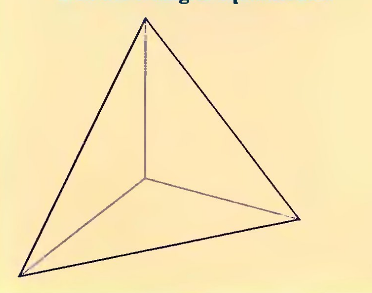
— le segment qui joint le sommet au centre du polygone de base est orthogonal au plan de base.

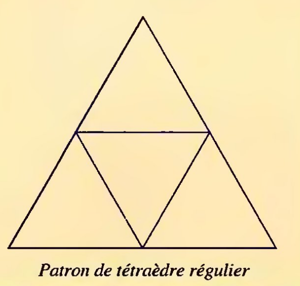
Alors les arêtes latérales ont la même longueur et les faces latérales sont des triangles isocèles.

Pyramide régulière à base carrée

13. 8 Tétraèdre régulier

Un tétraèdre régulier est une pyramide (régulière) dont toutes les faces sont des triangles équilatéraux.





Patron de tétraèdre régulier

Tétraèdre

Tétra *signifie "quatre" en grec. Un tétraèdre est une pyramide à quatre faces ; autrement dit, la base est triangulaire (et on pourrait prendre n'importe quelle face comme base).*

Perspective "militaire"

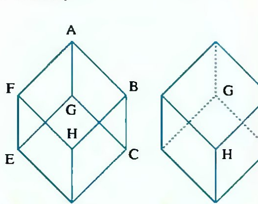
« Pour représenter les fortifications, on se sert d'une perspective qu'on appelle Perspective Cavalière ou Perspective Militaire, qui suppose l'œil infiniment éloigné du Tableau, et quoiqu'elle soit naturellement impossible, la force de la vue ne pouvant se porter à une distance infinie, elle ne laisse pas néanmoins de faire bon effet. »

J. Ozanam, Cours de mathématiques, nécessaire à un homme de guerre. (XVIIe siècle)

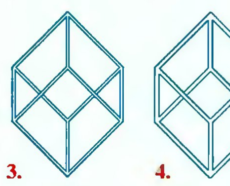
Cubes

■ ***Quel est le dessin qui ne représente pas un cube ?***

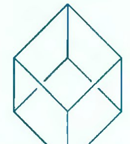
(Remarquez les différentes manières d'indiquer qu'une arête est devant une autre.)

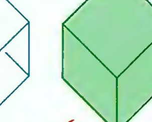






3. 4.





5. 6.

13.9 Perspective cavalière

Voici les trois règles principales de la perspectives dite "cavalière".

Règle 1. Les figures situées dans un plan vertical de face sont représentées en respectant les angles et les longueurs.

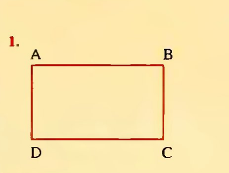
Règle 2. Lorsque deux droites sont parallèles dans l'espace, on les représenste par deux droites parallèles.

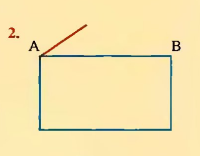
Règle 3. Sur deux droites parallèles, des segments de même longueur sont représentés par des segments de même longueur.

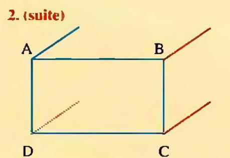
EXEMPLE

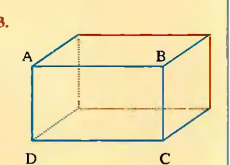
Pour représenter un parallélépipède rectangle :

1. Tracer un rectangle ABCD représentant la face supposée placée verticalement devant soi (règle 1).
2. Tracer la troisième arête issue de A, puis les trois autres arêtes, issues de B, C et D, parallèles et de même longueur (règles 2 et 3).
3. Tracer la face arrière en joignant les extrémités de ces 4 arêtes.





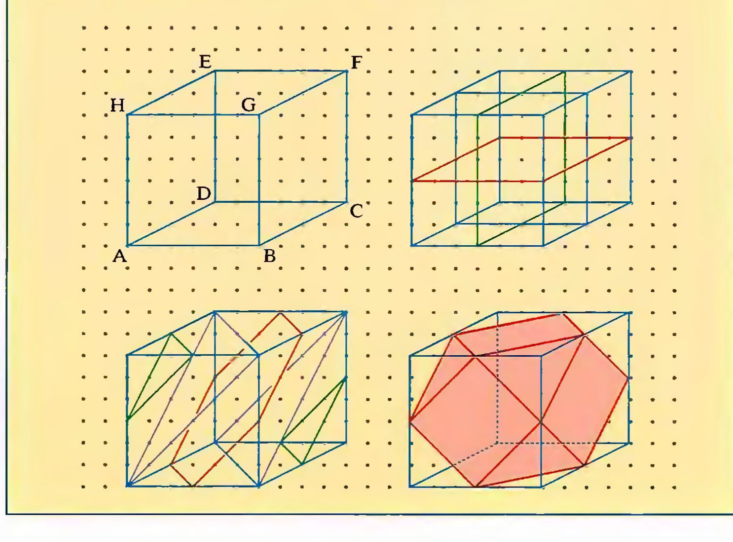




13.10 Perspective et quadrillage

Pour faciliter le tracé de figures en perspective cavalière, il est conseillé d'utiliser du papier quadrillé ou pointillé.

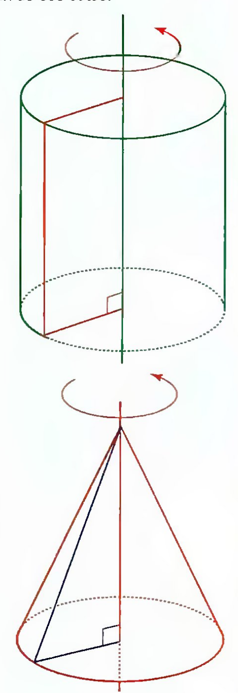
Voici le tracé d'un cube en perspective cavalière sur un tel papier, différentes sections du cube par des plans parallèles et le cube "tronqué" à chacun des sommets.



LES OBJETS RONDS

Solides de révolution

*Cylindres et cônes sont des **solides de révolution**. On peut les fabriquer (on dit aussi "engendrer") en faisant tourner un rectangle ou un triangle rectangle autour d'un de ses côtés.*



La Terre a en gros la forme d'une sphère de rayon 6 400 km.
Certains grands cercles de la sphère terrestre jouent un rôle privilégié pour se repérer à sa surface : les méridiens et les parallèles.



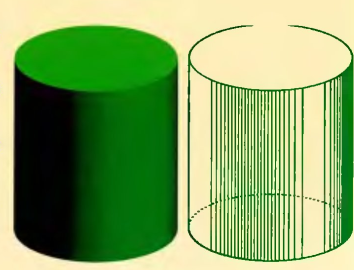
13.11 Cylindres

Un cylindre de révolution est un solide qui possède :

— deux bases qui sont des disques : les bases du cylindre.

— une face latérale qui, une fois "dépliée" serait un rectangle.

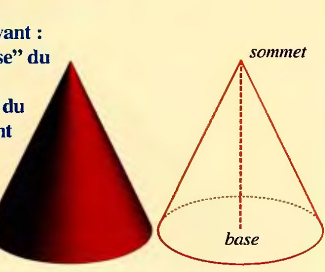
En perspective cavalière les bases circulaires sont représentées par des "ellipses".



13.12 Cônes

Un cône de révolution est un solide ayant :
— une face qui est un disque, la "base" du cône.
— un sommet particulier, le sommet du cône, qui se projette orthogonalement au centre de la base.

Le cône est alors délimité par sa base et par l'ensemble des segments joignant le sommet à un point du cercle de base.

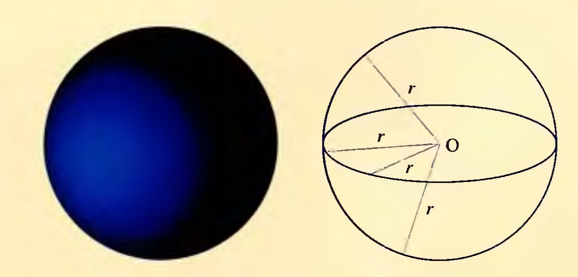


13.13 Sphères

O est un point, r est un nombre positif.

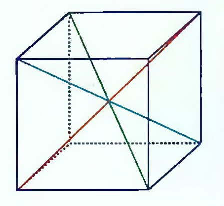
L'ensemble des points M de l'espace tels que OM = r est un solide appelé sphère de centre O et de rayon r.

L'intérieur de la sphère s'appelle une boule.



Un grand cercle de la sphère est l'intersection de la sphère et d'un plan passant par le centre. C'est un cercle qui a pour centre le centre de la sphère et pour rayon le rayon de la sphère.
Pour connaître le plus court chemin entre deux points sur la sphère, on trace le grand cercle passant par ces deux points. Le plus court des deux arcs définis par les deux points fournit la solution.

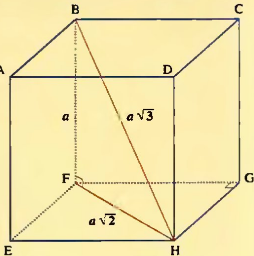
Attention !
Les trois diagonales d'un cube ont même mesure. Mais la représentation en perspective cavalière ne respecte pas cette égalité de mesures.



MESURER LES OBJETS

13.14 Côté, diagonale de face, diagonale du cube

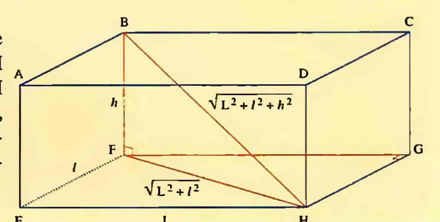
Dans un cube de côté a, la diagonale d'une face mesure $a\sqrt{2}$ et la diagonale du cube mesure $a\sqrt{3}$.



On applique l'énoncé de Pythagore dans le triangle FGH rectangle en G, pour trouver FH (diagonale de face). Puis dans le triangle BFH, rectangle en F, pour trouver BH (diagonale du cube).

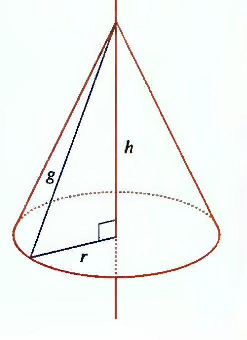
13.15 Diagonale du pavé droit

La diagonale d'un pavé de longueur L, de largeur l et de hauteur h mesure $\sqrt{L^2 + l^2 + h^2}$.

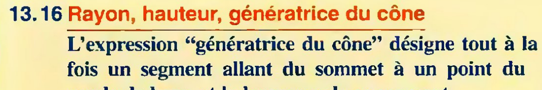


En appliquant l'énoncé de Pythagore dans le triangle FGH rectangle en G, pour trouver FH (diagonale d'une grande face), puis dans le triangle BFH, rectangle en F, pour trouver BH (diagonale du pavé).

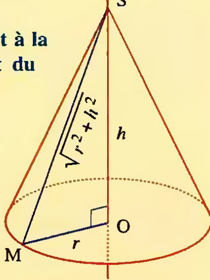
"Un" ou "le"
*Il arrive en mathématiques qu'un même mot désigne plusieurs notions, proches mais différentes. L'exemple le plus courant est le mot "rayon" pour un cercle. Ce mot désigne à la fois un segment (**un** rayon) et un nombre, longueur commune de tous ces segments (**le** rayon). Le contexte, et l'article défini ou indéfini, aident à choisir la bonne signification.*



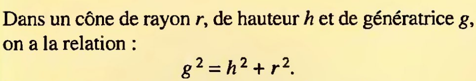
13.16 Rayon, hauteur, génératrice du cône



L'expression "génératrice du cône" désigne tout à la fois un segment allant du sommet à un point du cercle de base, et la longueur de ce segment.



Dans un cône de rayon r, de hauteur h et de génératrice g, on a la relation :



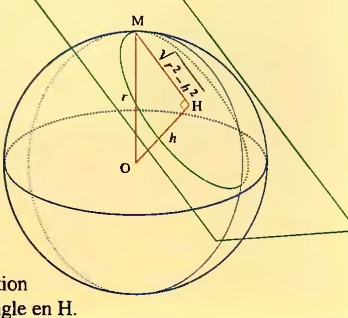
$$g^2 = h^2 + r^2.$$

Cette relation n'est rien d'autre que la relation de Pythagore dans le triangle OSM rectangle en O.

13.17 Section plane d'une sphère

Lorsqu'une sphère et un plan se coupent, leur intersection est un cercle.

Soit O le centre de la sphère et H le projeté orthogonal de O sur le plan. Soit r le rayon de la sphère et h la distance OH ($h < r$ puisque le plan coupe la sphère). Alors le rayon du cercle d'intersection est $\sqrt{r^2 - h^2}$.

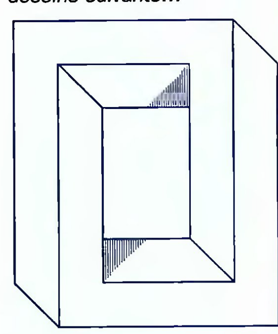


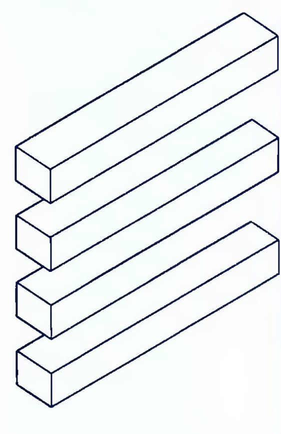
Cette égalité n'est rien d'autre que la relation de Pythagore dans le triangle OHM rectangle en H.

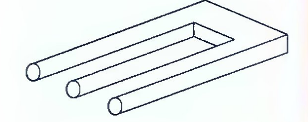
LA CONFUSION DES POINTS

On dessine sur une feuille à deux dimensions des objets qui en ont trois ou même quatre.
Fatalement des points qui ne le sont pas en réalité, vont se confondre sur leur représentation...

Les objets impossibles
Analyser et reproduire les dessins suivants...



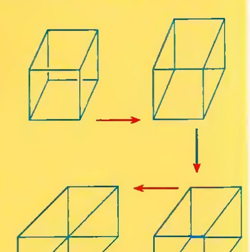




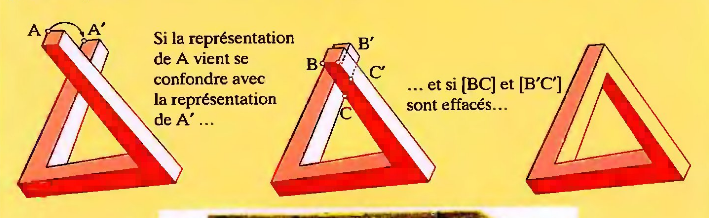
Les paradoxes de la perspective

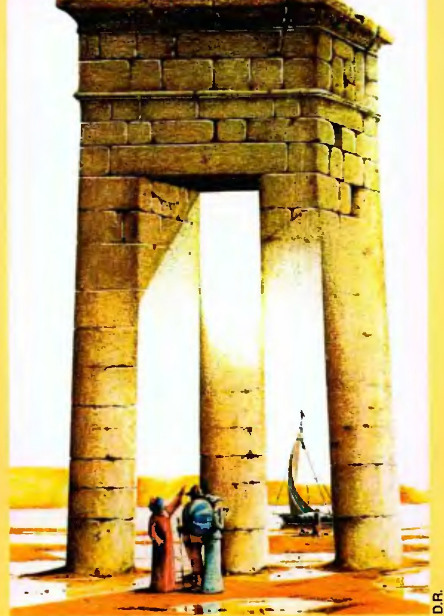
Il est remarquable que des règles aussi simples que celle de la perspective cavalière permettent de reconstituer mentalement une image à trois dimensions à partir d'un dessin à deux dimensions.
Mais on ne peut pas empêcher que plusieurs points de l'objet de l'espace soient représentés par des points confondus sur le dessin. C'est ce qui arrive aux dessins de certaines arêtes qui "se coupent" sur le dessin alors qu'elles ne se coupent pas dans l'espace.

Parfois cependant, on joue avec la confusion des points dans la représentation ; voyez les dessins successifs du cube, ci-contre, où deux parties d'arêtes l'une devant l'autre sont d'abord vues confondues, puis où un sommet se trouve exactement devant un autre.



Certains dessins exploitent ce phénomène en créant par le tracé des confusions n'existant pas dans la réalité à trois dimensions. On peut même "truquer" la représentation en faisant se prolonger des segments qui n'ont pourtant pas la même direction dans la réalité.



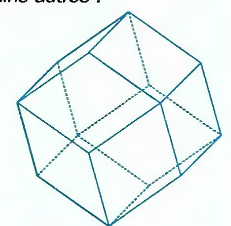


LA RÉGULARITÉ DES POLYÈDRES

Si chaque face d'un polyèdre est un polygone régulier et si ses faces sont attachées d'une même façon autour de chaque sommet, alors le polyèdre est dit "régulier". Si en plus, on peut poser une quelconque de ses faces sur une table, il est dit "convexe". Euclide et Platon, au 4e siècle av. J.-C. connaissaient cinq polyèdres réguliers convexes. Les mathématiciens démontrèrent facilement que ces cinq-là, le tétraèdre, le cube, l'octaèdre, le dodécaèdre et l'icosaèdre étaient bien les seuls qui pouvaient exister.

Polyèdres presque réguliers

La régularité des polyèdres réserve de belles surprises : ainsi, il existe des polyèdres dont toutes les faces sont identiques mais qui ne sont pas réguliers, comme le montre l'exemple de la figure suivante : les douze losanges de chaque face sont semblables. Ils sont groupés par trois autour de certains sommets, mais par quatre autour de certains autres !



La relation d'Euler

Vérifier que, pour tous les polyèdres de cette page, on a la relation

$$S + F = A + 2.$$

où S est le nombre de sommets, F le nombre de faces et A le nombre d'arêtes.

Les solides de Platon

Tétraèdre (représentation en fil de fer) — Tétraèdre (représentation pleine) — Tétraèdre (patron)

Hexaèdre ou cube — Hexaèdre ou cube — Hexaèdre ou cube

Octaèdre — Octaèdre — Octaèdre

Dodécaèdre — Dodécaèdre — Dodécaèdre

Icosaèdre — Icosaèdre — Icosaèdre

DÉCOUPER L'ESPACE

Le mathématicien allemand David Hilbert (1862-1943), un des plus grands de son temps, brossa en 1900 un tableau des principaux problèmes mathématiques à résoudre : 23 problèmes qui aiguillonneront les recherches du xxe siècle, et ne sont pas tous aujourd'hui complètement résolus.

Découpe

Il est possible de découper ce cube tronqué en huit morceaux identiques. À vous de chercher !



Le troisième problème de Hilbert

Le troisième problème posé par Hilbert est le suivant :

Deux pyramides de même hauteur et dont les bases sont des triangles de même aire (mais de formes différentes), ont même volume.

Est-il possible, en général, de découper l'une d'elles en quelques morceaux et de les empiler pour former l'autre ?

La réponse à cette question est non !

Entre 1900 et 1902, un de ses élèves, Dehn, démontra cette étonnante propriété qui semble en contradiction avec notre intuition forgée sur notre habitude des surfaces : En effet, dans le plan, si deux polygones ont même aire, alors il est possible de découper l'un d'eux en morceaux pour obtenir l'autre.

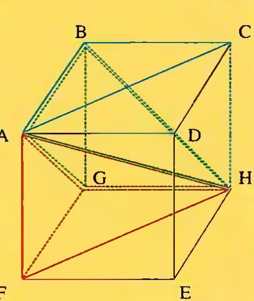
Il n'est pas possible de réaliser de tels découpages dans l'espace dans le cas général, et c'est là une assez grande surprise.

Voyons cependant un cas intéressant où ce découpage est possible : le **tétraèdre de Hill**.

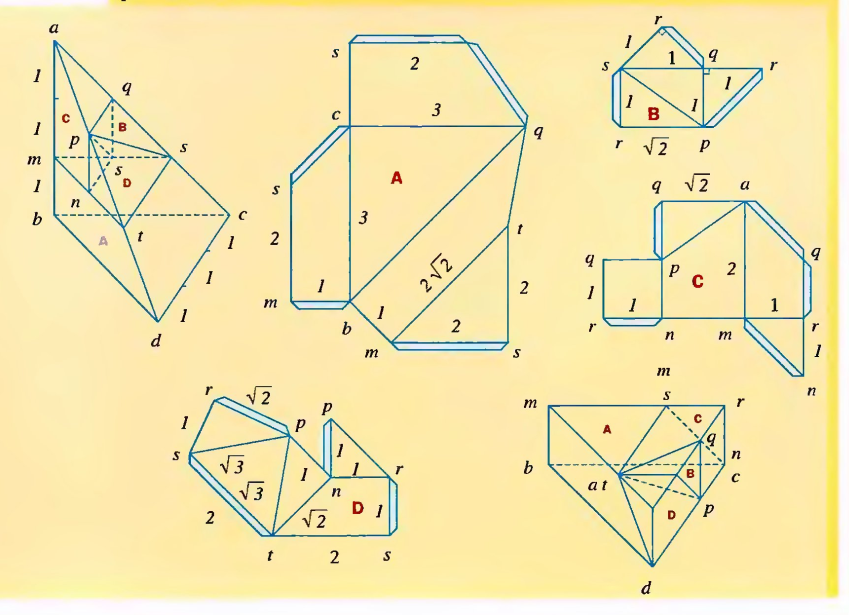
En 1896, le mathématicien Hill étudia ce tétraèdre AGHF dans le cube ABCDEFGH.

Avec trois tétraèdres identiques bien empilés (ici dessinés en rouge, bleu et vert), on reconstruit un prisme égal en volume à la moitié du cube.

Le volume du tétraèdre est donc bien égal au tiers du volume du prisme de même hauteur et de même base.



Mais on a aussi réussi, depuis, un découpage en morceaux de ce tétraèdre qui montre qu'il est égal en volume au prisme de même base, et de hauteur égale au tiers de celle du tétraèdre. Voici les patrons de ces morceaux :



Test 13

Pour chacune des 10 questions, indiquer la ou les bonnes réponses parmi A, B, C, D ou E

	Questions	A	B	C	D	E
1	Un polyèdre qui a quatre faces…	s'appelle un tétraèdre	s'appelle un quadraèdre	a forcément quatre sommets	a forcément huit arêtes	ne peut avoir une face carrée
2	D′ C′ A′ B′ D C A B Dans le cube…	(B′D) et (BD′) sont sécantes	(AC) et (DD′) sont orthogonales	le plan (ACD′) coupe le cube suivant un triangle	les plans (ACD′) et (A′BC′) sont parallèles	[DB′] et [A′D] ont même longueur
3	Les figures suivantes sont les patrons d'une pyramide à base carrée					
4	En perspective cavalière…	toutes les droites ont un point commun	il y a conservation du parallélisme	il y a conservation des angles	tout carré est représenté par un parallélogramme	un cercle n'est jamais représenté par un cercle
5	A I J B D C I et J sont les milieux de [AB] et [AC] dans le tétraèdre régulier.	(IJ) ne rencontre pas le plan (BCD)	les plans (DIJ) et (BCD) se coupent suivant une droite parallèle à (BC)	le plan (BJD) coupe la face (ACD) suivant (JD)	si O est le milieu de [CD], (IJO) est parallèle à (AD)	la droite (IJ) est orthogonale à (CD)
6	L'intersection d'un plan et d'un cube…	est toujours un polygone régulier	peut être un hexagone régulier	peut être un triangle équilatéral	n'est jamais un segment	peut être un carré
7	Ceci est un patron de cube…					
8	Une pyramide peut avoir…	plus de sommets que de faces	7 arêtes	6 arêtes	12 arêtes et 6 faces	12 arêtes et 7 sommets
9	Un cube est…	un parallélépipède rectangle	un prisme	une pyramide	un prisme droit	un tétraèdre régulier
10	Un parallélépipède a…	4 diagonales de même longueur	6 faces 2 à 2 superposables	12 sommets	8 arêtes	des arêtes quatre à quatre parallèles

THÈME 14

La magie géométrique

On pourrait croire qu'il s'agit dans ce chapitre d'une sorte de tour de prestidigitation géométrique. Ce n'est pas exactement le cas. Sous le nom de "transformation géométrique", les mathématiciens regroupent tous les "moyens" qu'ils ont étudiés pour faire correspondre un point du plan à un autre point du plan. Les premières rencontrées sont de simples "déplacements" ; on les appelle des "isométries".

Transformations du plan

Isométrie : du grec *iso* (même) et *metron* (mesure) ; des figures isométriques sont des figures dont toutes les mesures sont les mêmes (angles, longueurs). Au lieu d'isométriques, on dit aussi "superposables".

Les isométries

On en connaît quatre familles d'individus : symétrie orthogonale, symétrie centrale, translation, rotation ; en voici les définitions, les constructions d'images, les invariants...

Propriétés des isométries

Les portraits robots ont permis d'établir de troublants points communs entre ces familles.

Axes et centre

Sous l'action de certaines transformations, certaines figures réussissent à rester en forme. C'est qu'elles possédaient les "invariants" nécessaires.

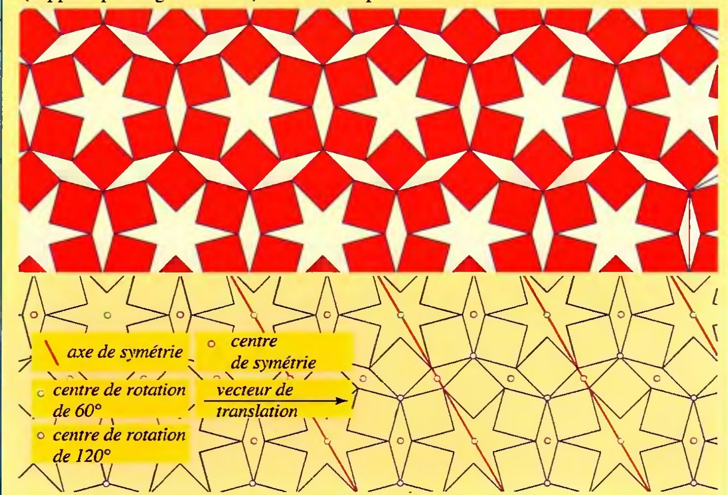
Projection

La projection : son ensemble d'arrivée est une droite. Du coup cette maladroite écrase tout et son action est réductrice.

Analyse d'un pavage

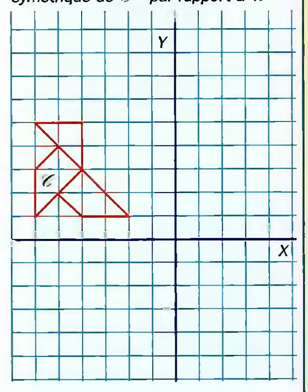
Les dessins à motifs répétitifs présentent souvent plus de symétries qu'on ne le voit au premier regard.

Sur la figure suivante, essayer de remarquer toutes les familles de symétries orthogonales, de rotations, de translations pour lesquelles l'image d'un point du dessin (supposé prolongé à l'infini) est aussi un point du dessin.



Hue, cocotte !

Sur du papier quadrillé, reproduisez la figure suivante :
Dessinez la "cocotte" $\mathcal{C}'$ symétrique de $\mathcal{C}$ par rapport à X, et celle $\mathcal{C}''$ symétrique de $\mathcal{C}'$ par rapport à Y.



■ ***Existe-t-il une symétrie orthogonale transformant $\mathcal{C}$ en $\mathcal{C}''$?***
Existe-t-il une symétrie centrale transformant $\mathcal{C}$ en $\mathcal{C}''$?

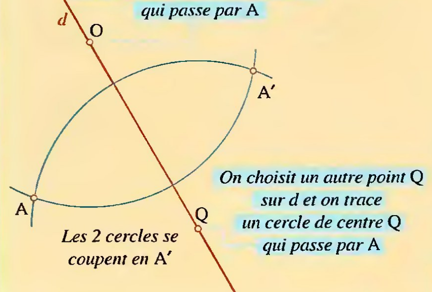
■ ISOMÉTRIES DU PLAN

14. 1 Symétrie orthogonale

Il faut : une droite *d*, axe de la symétrie.

Définition : M ′ est le symétrique de M dans la symétrie orthogonale d'axe *d* signifie que *d* est la médiatrice de [MM′].

Construction de l'image d'un point



A′ est le symétrique de A par rapport à *d*.

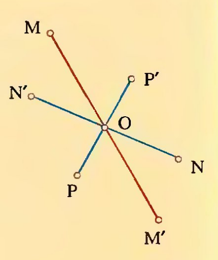
Points invariants
Tous les points de la droite *d* sont leur propre image dans la symétrie orthogonale d'axe *d*.

Dessinez les symétriques des lettres
A E F N P S X Z
par rapport à un point et par rapport à une droite.
■ ***Que sont devenues chacune de ces lettres ?***

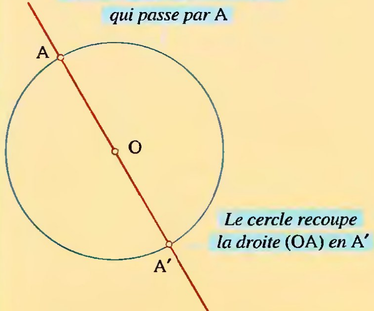
14. 2 Symétrie centrale

Il faut : un point O, centre de la symétrie.

Définition : M ′ est le symétrique de M dans la symétrie de centre O signifie que O est le milieu de [MM′].



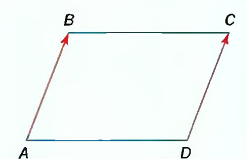
Construction de l'image d'un point



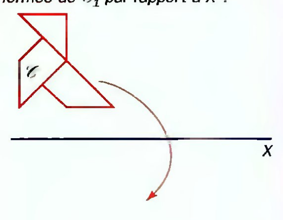
Points invariants
Seul, le point O est sa propre image dans la symétrie de centre O.

A′ est le symétrique de A par rapport à O.

Attention à l'ordre des lettres : si ABCD est un parallélogramme alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

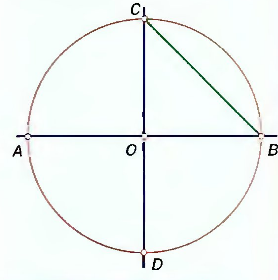


Dessinez la cocotte $\mathscr{C}_1$ transformée de $\mathscr{C}$ par la symétrie orthogonale par rapport à X, puis la cocotte $\mathscr{C}_2$ transformée de $\mathscr{C}_1$ par rapport à X'.



■ ***Existe-t-il une transformation faisant passer de $\mathscr{C}$ à $\mathscr{C}_2$?***

Tracer un cercle de centre O, deux diamètres perpendiculaires [AB] et [CD] et une corde [BC].

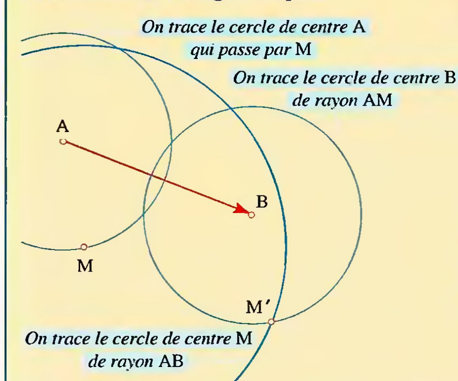


Sur le même dessin tracer les figures obtenues en faisant tourner celle-ci de 45°, de 90°, de 135°, de 180°, de 225°, de 270° et de 315°.

14. 3 Translation

Il faut : deux points A et B, qui déterminent le vecteur de translation $\overrightarrow{AB}$.
Définition : M' est l'image de M dans la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ signifie que ABM'M est un parallélogramme.

Construction de l'image d'un point



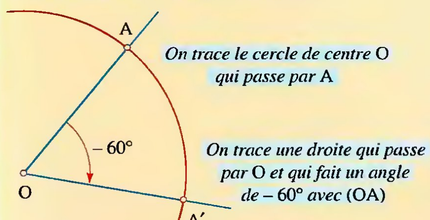
M' est l'image de M dans la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Points invariants
Il n'y a aucun point invariant dans une translation de vecteur non nul (c'est-à-dire différent du vecteur $\overrightarrow{AA}$).

14. 4 Rotation

Il faut : un point O, centre de la rotation, un angle α, et un sens de rotation (par convention, le sens positif est le sens inverse des aiguilles d'une montre).
Définition : M' est l'image de M dans la rotation de centre O et d'angle α et de sens positif (respectivement de sens négatif) signifie $\widehat{MOM'} = \alpha$, OM = OM', on va de M à M' dans le sens positif (respectivement négatif).

Construction de l'image d'un point



A' est l'image de A dans la rotation de centre O et d'angle – 60°.

Points invariants
Seul, le centre O est sa propre image dans une rotation de centre O (et d'angle ne mesurant pas 0° !).

La conservation des "HORREURS"

Parmi les écritures du mot HORREUR ci-dessous, quelles sont celles qui peuvent se déduire du mot coloré par une translation ? par une rotation ? par une symétrie orthogonale ?

HORREUR

HORREUR

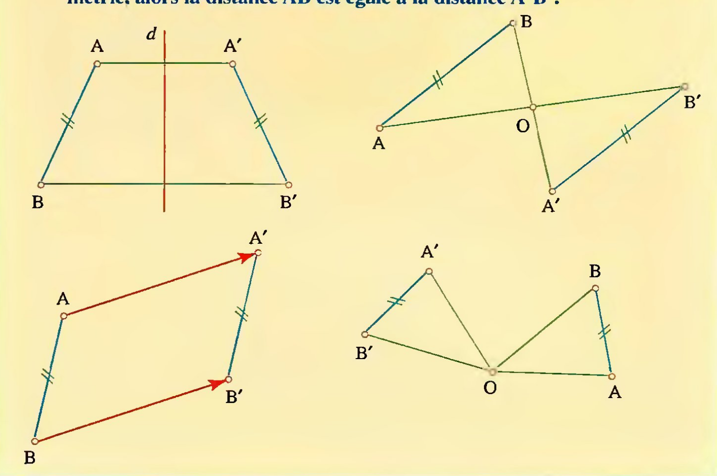
HORREUR

PROPRIÉTÉS DES ISOMÉTRIES

Dans ce qui suit, le mot isométrie remplace, au choix, les mots "symétrie orthogonale", "symétrie centrale", "translation" ou "rotation".

14. 5 Conservation des longueurs

Si A et B sont deux points et A′ et B′ leurs images respectives dans une isométrie, alors la distance AB est égale à la distance A′B′.

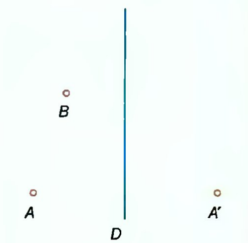


Symétrique à la règle

Sam a juste une règle non graduée pour faire son exercice.

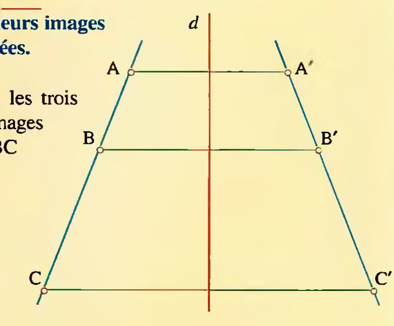
A′, symétrique de A par rapport à D, est déjà construit.

Comment doit-il s'y prendre pour construire B′ symétrique de B ?



14.6 Conservation de l'alignement

Si trois points sont alignés, leurs images par une isométrie sont alignées.



Appelons A, B et C (dans l'ordre), les trois points alignés et A′, B′, C′ leurs images respectives. On a alors AC = AB + BC et donc (conservation des distances)

A′C′ = A′B′ + B′C′,

d'où l'alignement de A′, B′ et C′.

14.7 Conservation des angles

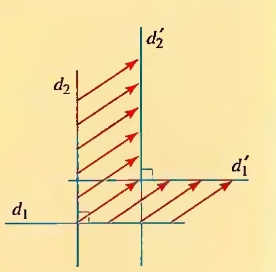
Si A, B, C sont trois points, si A′, B′ et C′ sont les images respectives de ces trois points par une isométrie, alors $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$.

Conservation des phrases
Voici 3 phrases ou bouts de phrases
"Élu par cette crapule"
"Ésope reste ici et se repose"
"Et la marine va, Papa, venir à Malte"
Qu'ont donc en commun ces trois phrases ? *(Chercher le mot "palindrome" dans le dictionnaire).*

14.8 Conservation de l'orthogonalité

Si deux droites sont perpendiculaires, leurs deux images, dans une isométrie, sont des droites perpendiculaires.

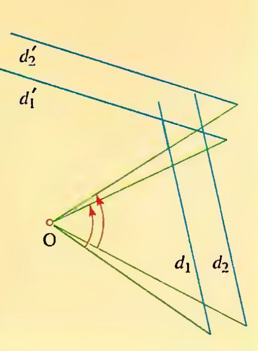
C'est une conséquence de la conservation des angles (droits !).



14.9 Conservation du parallélisme

Si deux droites sont parallèles, leurs deux images, dans une isométrie, sont des droites parallèles.

C'est une conséquence de la conservation de l'orthogonalité (deux droites parallèles sont orthogonales à une même troisième).



La tête qui tourne
Ces deux têtes se correspondent, semble-t-il, par une rotation.
Mais où se trouve exactement le centre de cette rotation, et, accessoirement, quel en est l'angle ?

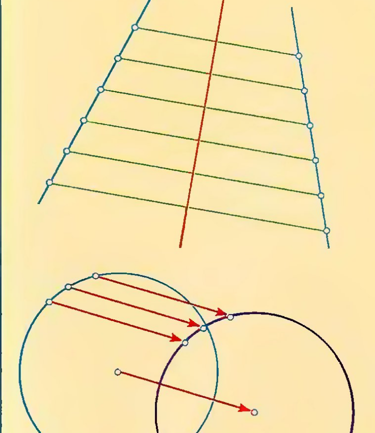


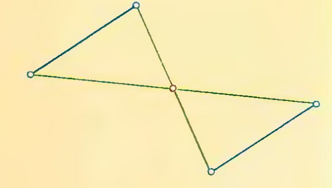
14.10 Images de figures

Une autre façon d'exprimer les propriétés de conservation est de les traduire en regardant ce que devient une figure dans une isométrie.

- **L'image d'une droite, par une isométrie, est une droite.**

- **L'image d'un segment, par une isométrie, est un segment de même longueur.**

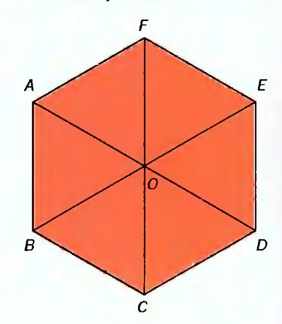




- **L'image d'un cercle, par une isométrie, est un cercle de même rayon.**

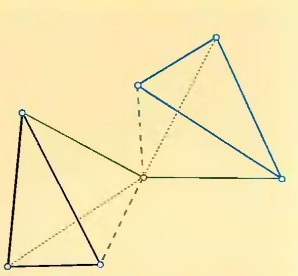
Hexagone régulier

■ ***Si on choisit 2 triangles équilatéraux au hasard parmi les six de la figure ci-dessous, sont-ils images dans une isométrie ? dans plusieurs isométries ?***

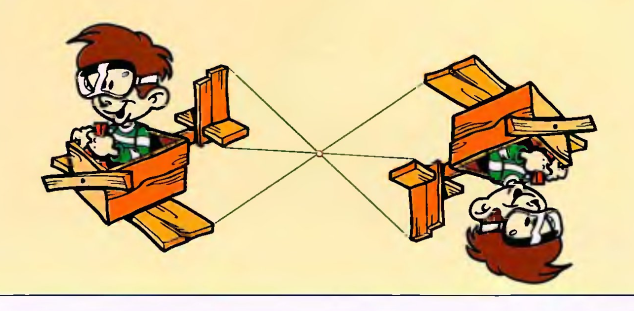


14.11 Images d'une figure (suite)

• L'image d'un triangle est un triangle dont les côtés et les angles sont les mêmes que ceux du triangle de départ.

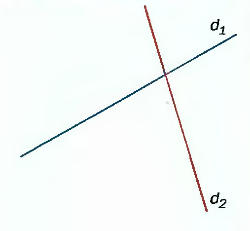


• Plus généralement, l'image d'une figure est une figure en tous points superposable à la figure de départ (mêmes longueurs de côtés, mêmes angles, même aire).



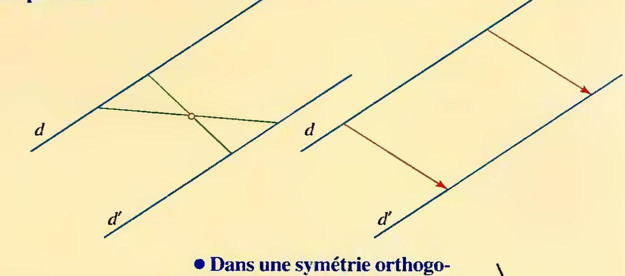
Exercice basique

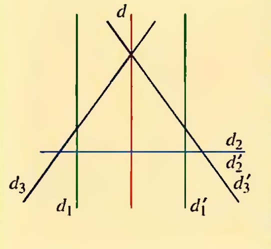
■ ***Existe-t-il :***
une symétrie centrale ?
une symétrie orthogonale ?
une rotation ?
une translation ?
dans laquelle d_1 a pour image d_2 ?
Si oui, en existe-t-il plusieurs ?



14.12 Particularismes

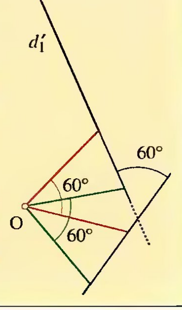
• Dans une symétrie centrale et dans une translation, l'image d'une droite est une droite parallèle.



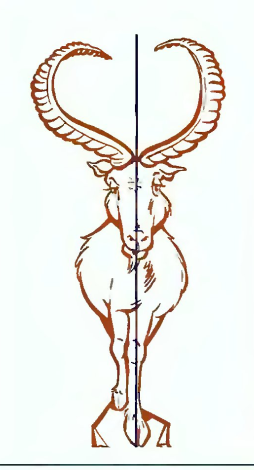


• Dans une symétrie orthogonale, l'image d'une droite parallèle à l'axe est une droite parallèle. Une droite perpendiculaire à l'axe est sa propre image. Une droite non parallèle à l'axe et sa symétrique se coupent sur l'axe.

• Dans une rotation, une droite et son image font entre elles un angle égal à l'angle de la rotation.



La symétrie des figures a beaucoup et depuis longtemps tracassé les hommes. D'abord, parce qu'elle est présente, de manière approchée, dans la nature (à commencer par la figure humaine), ensuite parce que l'homme a utilisé les symétries comme sources de beauté et d'harmonie dans ses propres créations (architecturales par exemple).



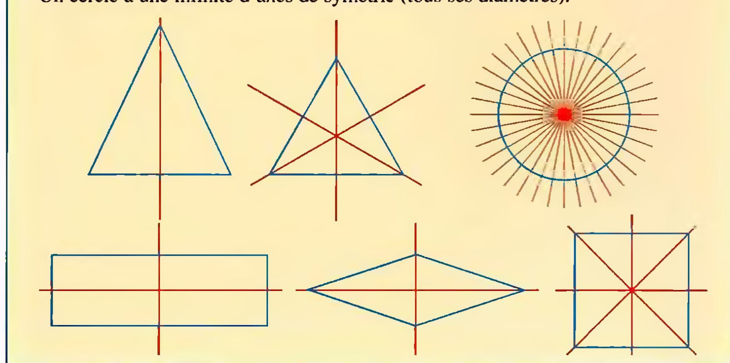
AXES ET CENTRES DE SYMÉTRIE

14.13 Axes de symétrie

La droite *d* est axe de symétrie de la figure F signifie que tout point de la figure F a pour image un point de F dans la symétrie orthogonale d'axe *d*.

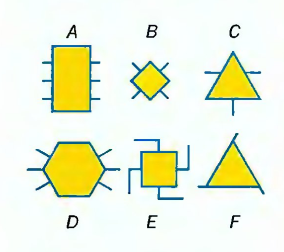
EXEMPLES

- un triangle isocèle a un axe de symétrie et un triangle équilatéral a trois axes de symétrie.
- Un rectangle ou un losange possède deux axes de symétrie, un carré possède quatre axes de symétrie.
- Un cercle a une infinité d'axes de symétrie (tous ses diamètres).



Marché aux puces

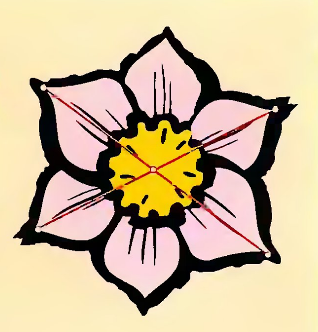
Une usine japonaise produit des "puces" pour ordinateur. Le prix de la puce dépend de ses symétries : 10 F pour un axe, 1 F pour un centre.



Combien coûte chacune des puces ci-dessus ?
Il paraît qu'il existe une puce sans patte dont le prix est inimaginable ! Pouvez-vous la dessiner ?

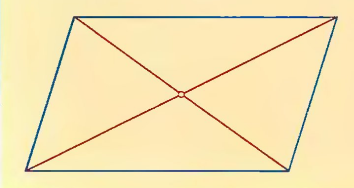
14.14 Centre de symétrie

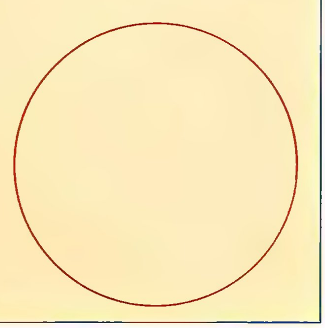
Le point O est centre de symétrie de la figure F signifie que tout point de la figure F a pour image un point de F dans la symétrie de centre O.



EXEMPLES

- Aucun triangle n'a de centre de symétrie (et pour cause : que deviendraient les sommets ?).
- Un parallélogramme a un centre de symétrie (et cette propriété le caractérise parmi les quadrilatères).
- Un cercle a un centre de symétrie (devinez-où ?).
- Les polygones réguliers ont des axes de symétrie, ils ont aussi un centre de symétrie quand ils ont le bon goût d'avoir un nombre pair de côtés.





PROJECTION

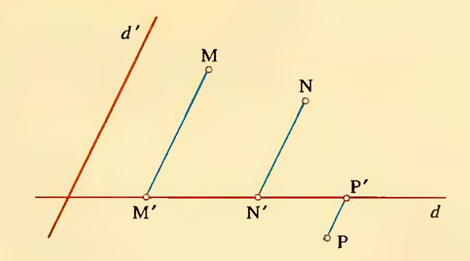
14.15 Projection sur une droite d, parallèlement à une droite d′

Il faut deux droites *d* et *d′* non parallèles :

- **une droite *d*, sur laquelle on projette.**
- **une droite *d′* parallèlement à laquelle on projette.**

Définition : M′ est le projeté de M sur *d* parallèlement à *d′* signifie que M′ appartient à *d* et (MM′) // *d′*.





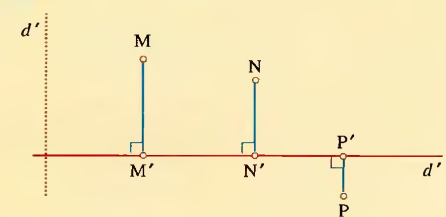
Points invariants

Chaque point de la droite *d* est son propre projeté sur *d* parallèlement à *d′*.

14.16 Projection orthogonale du plan sur une droite d

Il faut une droite *d*.

Définition : M′ est le projeté orthogonal de M sur *d* signifie que M′ appartient à *d* et (MM′) ⊥ *d*.



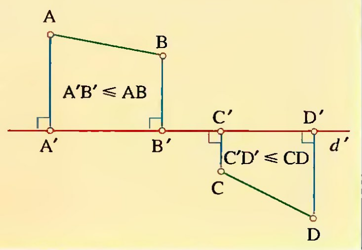
Autrement dit :

la projection orthogonale sur *d* est la projection sur *d* parallèlement à une droite *d′* qui serait perpendiculaire à *d*.

Projection orthogonale et distances

Une projection orthogonale raccourcit les distances.

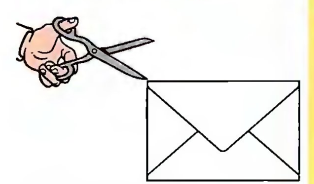
Cela signifie que, si A et B sont deux points et que A′ et B′ sont leurs images dans une projection orthogonale, alors on peut être sûr que A′B′ ≤ AB.



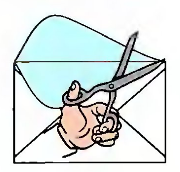
COMMENT RÉALISER UN PAVAGE

Le pavage le plus simple s'obtient avec un assemblage de parallélogrammes. Mais il y a beaucoup d'autres techniques de fabrication de pavés. Certaines sont assez fantastiques...

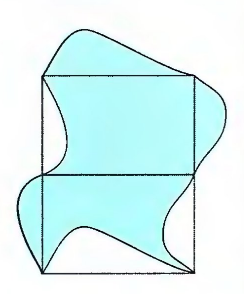
Le truc de l'enveloppe



1. Glisser la pointe des ciseaux dans un des coins d'une enveloppe et commencer à la découper.
2. Si vous découpez en allant d'un coin à l'autre, vous pourrez étaler un côté de l'enveloppe dans le prolongement de l'autre.

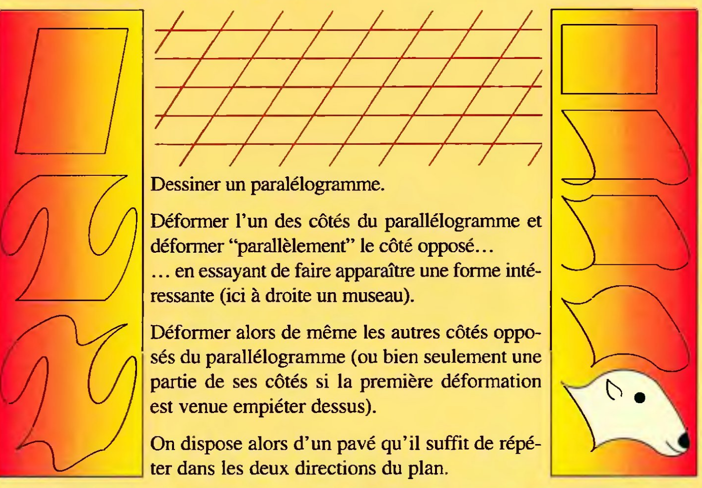


3. En passant par les quatre coins vous pouvez étaler sur une table une forme bizarre avec laquelle, miracle, vous pourriez paver le sol de votre salle de bain !



Les moutons de Panurge

Panurge est un personnage de Rabelais (Pantagruel, 1532) qui voulait se venger d'un marchand de moutons. Sur le navire le conduisant à la Dive Bouteille, il jette l'un des moutons à la mer : tous les autres le suivent alors en l'imitant "bêtement". Dans cette page, les moutons de Panurge sont des pavés tous semblables qui s'assemblent pour remplir le plan.
Il y a de nombreuses techniques pour paver le plan. La technique la plus évidente consiste à partir d'un pavage existant et à le déformer en essayant d'y introduire des formes que l'on voudrait voir apparaître dans le dessin final. En voici un exemple dérivé d'un pavage de parallélogrammes.

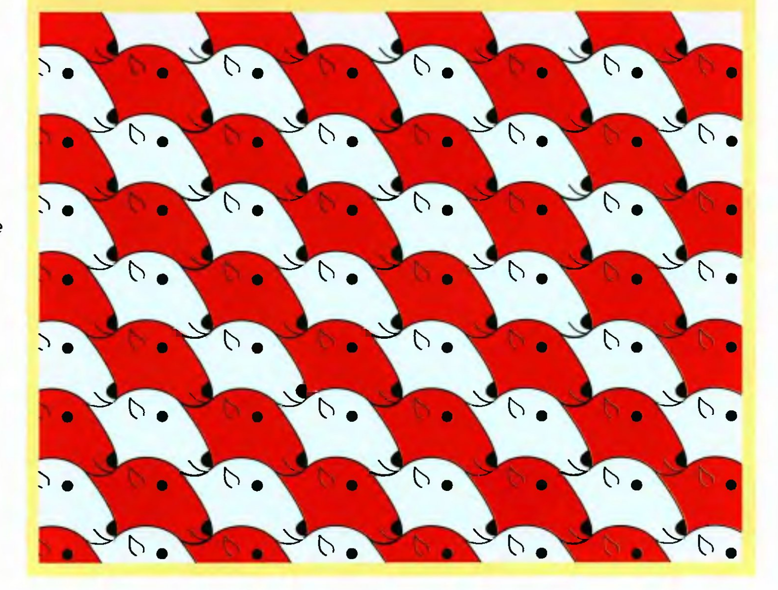


Dessiner un paralélogramme.

Déformer l'un des côtés du parallélogramme et déformer "parallèlement" le côté opposé...
... en essayant de faire apparaître une forme intéressante (ici à droite un museau).

Déformer alors de même les autres côtés opposés du parallélogramme (ou bien seulement une partie de ses côtés si la première déformation est venue empiéter dessus).

On dispose alors d'un pavé qu'il suffit de répéter dans les deux directions du plan.



Test 14

Pour chacune des 10 questions, indiquer la ou les bonnes réponses parmi A, B, C, D ou E

	Questions	A	B	C	D	E
1	Les fanions sont-ils symétriques par rapport à la droite ?					
2	Les fanions sont-ils symétriques par rapport au point ?					
3	Quelle peut être l'image de ces fleurs dans une rotation ?					
4	Quelle peut être l'image de ces fleurs dans une translation ?					
5	Dans la translation de vecteur $\overrightarrow{EO}$...	A a pour image F	O a pour image B	D a pour image C	O est invariant	E a pour image O
6	Dans la rotation de centre O et d'angle 120°...	F a pour image E	A a pour image E	B est l'image de A	O est invariant	F est l'image de B
7	On obtient toujours une rotation en faisant successivement...	2 rotations de même centre	2 rotations de centres différents	1 translation et 1 rotation	2 symétries d'axes parallèles	2 symétries d'axes sécants
8	On obtient toujours une translation en faisant successivement...	2 translations	2 rotations de même centre	1 translation et 1 rotation	2 symétries d'axes parallèles	2 symétries d'axes sécants
9	Quel est l'intrus parmi les mots ?	BOB	OUI	DOC	DIX	BIC
10	Quel est l'intrus parmi les mots ?	BOB	SIS	NON	SOS	OSO

THÈME 15

Des flèches virtuelles

Les physiciens associent les "vecteurs" à des forces, des flux ou des quantités de mouvement et ils aiment bien dessiner des flèches pour les représenter. L'idée est intéressante et juste mais elle est difficile à préciser mathématiquement. Le plus étonnant est que l'on puisse tout de même l'utiliser au niveau des collèges sans savoir exactement de quoi l'on parle !
Et ceci n'est pas un paradoxe, mais plutôt un indice remarquable de la puissance des mathématiques...

Vecteurs et repérage

Vecteur, du latin *vector* (qui transporte) est tiré du verbe *vehere, vectus* qui nous a donné aussi "véhicule". Un vecteur $\overrightarrow{AB}$ n'est rien d'autre que "quelque chose" qui transporte A en B.

Vecteurs du plan

L'homme préhistorique a inventé la flèche pour atteindre les animaux à distance. Le mathématicien a récupéré le symbole pour noter les vecteurs du plan...

Droite graduée et plan repéré

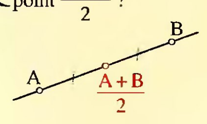
Le Petit Poucet a semé régulièrement ses cailloux blancs sur le chemin de la forêt et ses malheureux parents n'ont pas réussi à le perdre. Sans le savoir, il venait d'inventer le repérage. Vous aussi, apprenez à graduer la droite pour ne pas vous perdre en chemin... et à vous repérer dans le plan, grâce à l'usage d'un judicieux quadrillage.

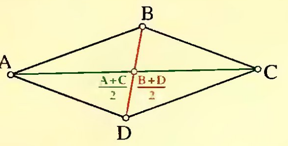
Équation d'une droite

L'adresse d'un point, ce sont ses deux coordonnées. L'adresse d'une droite, c'est son équation.

L'algèbre géométrique

QUI N'A PAS EU ENVIE un jour d'écrire que le milieu des points A et B était le point $\frac{A+B}{2}$?

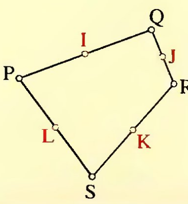




Si on pouvait ainsi CALCULER AVEC DES POINTS, on saurait que ABCD est un parallélogramme lorsqu'on aurait l'égalité $\frac{A+C}{2} = \frac{B+D}{2}$.

Considérons alors un quadrilatère absolument quelconque PQRS.
Et intéressons-nous au milieu de ces côtés : I, J, K, L.
Nous traduirions :

$$I=\frac{P+Q}{2} \quad J=\frac{Q+R}{2} \quad K=\frac{R+S}{2} \quad L=\frac{S+P}{2}.$$



Notre "algèbre", avec son addition commutative, nous dirait alors que :

$$\frac{P+Q}{2} + \frac{R+S}{2} = \frac{Q+R}{2} + \frac{S+P}{2};$$

c'est-à-dire $I+K = J+L$ ou

$$\frac{I+K}{2} = \frac{J+L}{2}.$$

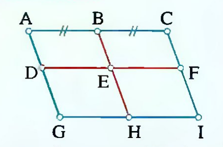
Conclusion : IJKL serait un parallélogramme !

En fait, les mathématiciens préfèrent ne pas calculer avec des POINTS mais avec des BI-POINTS qu'ils écrivent $\overrightarrow{AB}$. Bonjour les vecteurs !!!

Un vecteur est un objet complexe dont l'utilisation est simple.

Dire que des vecteurs sont égaux, c'est une autre façon d'exprimer la présence d'un parallélogramme

Avis de recherche



Dans cette figure se cachent des vecteurs ayant 2, 3 ou 6 représentants

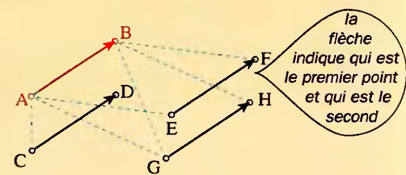
Forte récompense à qui ramènera chacun d'eux.

VECTEURS DU PLAN

15. 1 Définition d'un vecteur

A et B sont deux points du plan. On appelle "vecteur AB", noté $\overrightarrow{AB}$, l'ensemble de tous les couples de points (M,N) du plan tels que ABNM soit un parallélogramme.

Voici quelques éléments (on dit quelques "représentants") du vecteur $\overrightarrow{AB}$.



15. 2 Représentants d'un vecteur

Un couple de points qui appartient au vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un représentant de ce vecteur.

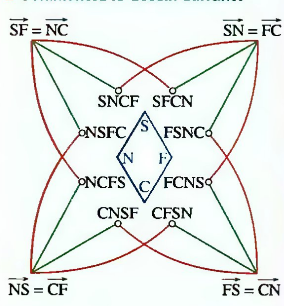
Les phrases :

(C,D) est un représentant de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}$

sont des phrases équivalentes.

REMARQUES :
- le couple (A,B) lui-même est un représentant du vecteur $\overrightarrow{AB}$ car ABBA est considéré comme un parallélogramme.
- tout vecteur a une infinité de représentants.

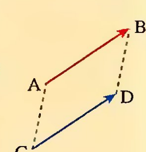
Commentez le dessin suivant :



VECTEURS DU PLAN

15. 3 Les trois "mêmes"

L'égalité $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ traduit trois propriétés simultanées :
— les segments [AB] et [CD] ont la même longueur ;
— les droites (AB) et (CD) sont parallèles ;
— les demi-droites [AB) et [CD) ont le même sens.

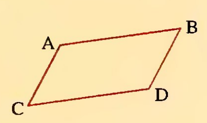


15. 4 Traduction vectorielle du parallélogramme

A, B, C et D sont 4 points.

Si ABDC est un parallélogramme, alors $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$,

Réciproquement, si $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$, alors ABDC est un parallélogramme.



15. 5 Traduction vectorielle du milieu

A, B et M sont 3 points.
Si M est le milieu de [AB], alors $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$.
Réciproquement, si $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$, alors M est le milieu de [AB].

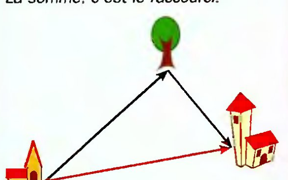


Dans cette figure, AMBM est un parallélogramme (aplati) !

Michel Chasles, mathématicien français (1793-1880)



La somme, c'est le raccourci!



Pour dessiner le représentant de la somme de deux vecteurs, on a intérêt à mettre "bout à bout" deux de leurs représentants.

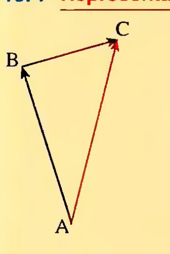
15. 6 Addition des vecteurs

Dans l'ensemble des vecteurs du plan, on a imaginé un moyen qui, à deux vecteurs, en fait correspondre un troisième, qu'on a appelé leur somme. L'opération addition ainsi fabriquée a de saisissantes ressemblances avec l'addition des nombres, mais elle est encore plus simple !

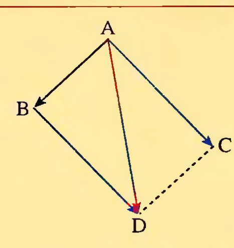
A, B et C étant 3 points : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

C'est cette égalité, connue sous le nom de **relation de Chasles**, qui définit la somme des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.

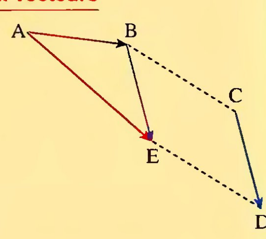
15. 7 Représentations de la somme de deux vecteurs



$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$
(définition)



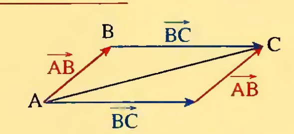
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}$
(diagonale du parallélogramme défini par AB et AC)



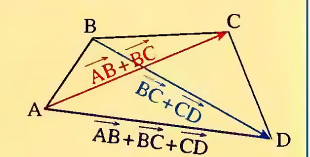
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AE}$
(mise bout à bout des représentants)

15. 8 Propriétés de l'addition des vecteurs

• Pour tous points A, B et C,
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}$.



• Pour tous points A, B, C et D,
$(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})$.



• On note $\vec{0}$ le vecteur dont les représentants sont (A,A), (B,B), (C,C) etc…

Alors, pour tous points A et B, $\overrightarrow{AB}+\vec{0}=\overrightarrow{AB}$.

• Tout vecteur possède un vecteur opposé.

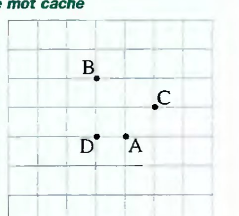
L'opposé du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur $\overrightarrow{BA}$. En effet : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\vec{0}$.

15. 9 Soustraction des vecteurs

Soustraire un vecteur, c'est ajouter son opposé.

EXEMPLE :
$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$.

Le mot caché



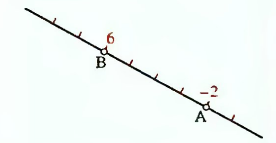
Placer les points de E à N qui vérifient les propriétés suivantes :

$\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{FB}=\overrightarrow{AE}$
$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{EA}$	$\overrightarrow{HG}=\overrightarrow{AF}$
$\overrightarrow{CI}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{EC}$	$\overrightarrow{FD}=\overrightarrow{JE}$
$\overrightarrow{IK}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{JA}$	$\overrightarrow{KA}=\overrightarrow{LF}$
$\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{FK}$	$\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{BJ}$

Tracer ensuite :
[ML], [LN], [NB], [BM], [JK], [AE], [AI].

Graduation

Une graduation est bien définie par deux points et leurs abscisses. Voici deux points d'une droite graduée :



Où est l'origine, Quelle est l'unité ?

DROITE GRADUÉE

15.10 Abscisse d'un point sur une droite graduée

D est une droite. Graduer D, c'est choisir un point O sur D (l'origine), choisir une unité de longueur et un sens. Alors, à tout point de D, on peut associer un nombre relatif qu'on appelle son *abscisse*.

EXEMPLES :

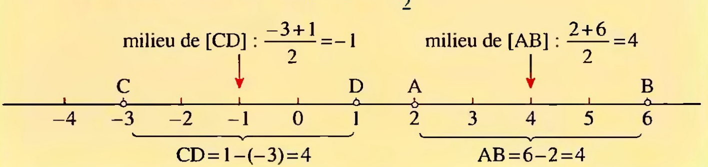
abscisse de A = –2 ; abscisse de B = 3,5.

15.11 Abscisse, distance et milieu

A et B sont deux points d'une droite graduée D.

Si a est l'abscisse de A et b est l'abscisse de B, alors :

- **La distance AB (dans l'unité choisie pour graduer D) est la différence positive des abscisses de A et de B.**
  Si $a > b$, $AB = a - b$ et si $b > a$, $AB = b - a$.
- **L'abscisse du milieu M de [AB] est $\frac{a+b}{2}$.**



Si O est l'origine des repères, si I et J sont les points d'abscisse 1 sur chaque axe, on dit que (O,I,J) est un repère du plan.
Quand les axes sont perpendiculaires et gradués avec la même unité, le repère (O, I, J) est dit orthonormal.

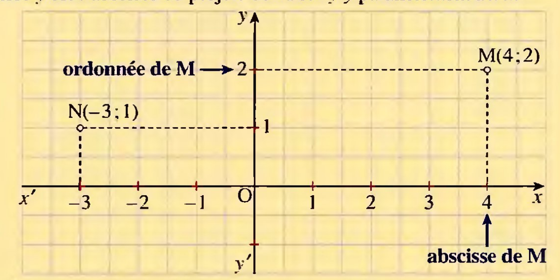
PLAN REPÉRÉ

15.12 Coordonnées d'un point dans un plan repéré

Pour se repérer dans un plan, on utilise souvent deux droites $x'x$ et $y'y$ perpendiculaires en un point O. On gradue $x'x$ et $y'y$ avec la même unité et on prend O comme origine. Alors à tout point M du plan, on peut associer un couple de nombres $(x ; y)$ qu'on appelle ses coordonnées.

Le nombre x est l'abscisse du projeté de M sur $x'x$ parallèlement à $y'y$.

Le nombre y est l'abscisse du projeté de M sur $y'y$ parallèlement à $x'x$.



Trouver le repère

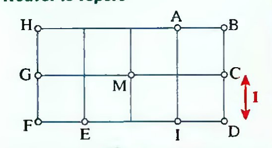
Le point M a pour coordonnées (1;2). Mais dans quel repère ?

15.13 Coordonnées du milieu

Dans un plan repéré, si A a pour coordonnées $(x_A ; y_A)$ et B a pour coordonnées $(x_B ; y_B)$, alors le milieu M de [AB] a pour coordonnées :

$$\left(\frac{x_A + x_B}{2} ; \frac{y_A + y_B}{2}\right).$$

Trouver le repère

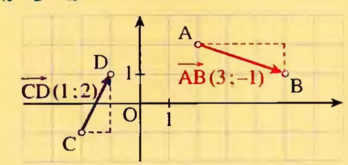


■ ***Le vecteur $\overrightarrow{AD}$ a pour coordonnées (2;–1). Mais dans quel repère?***

15.14 Coordonnées d'un vecteur

Dans un plan repéré, A a pour coordonnées $(x_A ; y_A)$ et B a pour coordonnées $(x_B ; y_B)$.

Par définition, on appelle coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ le couple de nombres $(x_B - x_A ; y_B - y_A)$.



Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ caractérisent le "déplacement" à effectuer pour se rendre de A à B. À ce titre, elles sont liées au vecteur $\overrightarrow{AB}$.

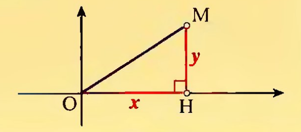
■ ***Où?***
J'ai cherché des entiers relatifs solutions de l'équation $x^2 + y^2 = 25$.
J'ai placé, dans le plan muni d'un repère orthonormal, les points correspondants.
Qu'ai-je vu alors, et pourquoi?

15.15 Distance d'un point à l'origine

Si le point M a pour coordonnées $(x ; y)$ dans un repère orthonormal, alors la distance OM est donnée par la formule:

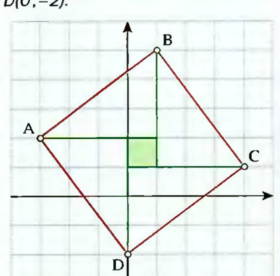
$$OM = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Cette formule un peu rébarbative n'est autre que l'écriture de la relation de Pythagore dans le triangle OHM rectangle en H.



Le carré chinois

On donne A(–3;2), B(1;5), C(4;1) et D(0;–2).



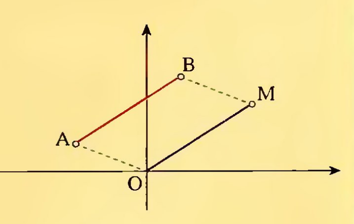
■ ***Quelles sont les coordonnées des vecteurs: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$?***
Quelles sont les longueurs: AB, BC, CD, DA?

15.16 Distance de deux points

Dans un plan muni d'un repère orthonormal, si le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x ; y)$ alors la distance AB est donnée par la formule:

$$AB = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

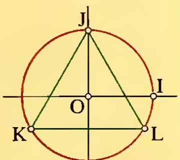
En effet si (OM) est le représentant de $\overrightarrow{AB}$ d'origine O, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ sont $(x ; y)$ (les mêmes que celles de $\overrightarrow{AB}$ puisque $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$). Le couple $(x ; y)$ est aussi le couple des coordonnées du point M; et la distance OM, qui vaut $\sqrt{x^2+y^2}$, est égale à la distance AB.



Conséquence: si on connaît les coordonnées de deux points A et B, on peut calculer la distance entre ces points en deux temps:
- on calcule les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$;
- on applique la formule ci-dessus.

EXEMPLE: Dans le repère (O, I, J).
Soit L et K les points de coordonnées $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} ; -\frac{1}{2}\right)$ et $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} ; -\frac{1}{2}\right)$.

Ils sont à la distance 1 de O; en effet $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1$.



Ils sont donc sur le cercle de centre O passant par I et J.
Vérifiez que le triangle JKL est équilatéral en montrant que JK=KL=LJ.

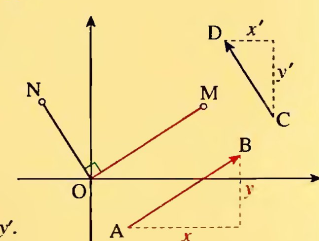
Dans l'énoncé précédent ("le carré chinois"), vérifier que les droites (AB) et (BC) sont perpendiculaires, et aussi les droites (BC) et (CD), (CD) et (DA), (DA) et (AB).

15.17 Orthogonalité dans le plan repéré

Dans un plan muni d'un repère orthonormal, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x;y)$ et le vecteur $\overrightarrow{CD}$ a pour coordonnées $(x';y')$, alors :

(AB) ⊥ (CD) si et seulement si $xx'+yy'=0$.

DÉMONSTRATION :
$OM=\sqrt{x^2+y^2}$
$ON=\sqrt{x'^2+y'^2}$
$MN=\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2}$
(AB)⊥(CD) équivaut à (OM)⊥(ON)
équivaut à $MN^2=OM^2+ON^2$.
$(x'-x)^2+(y'-y)^2=(x^2+y^2)+(x'^2+y'^2)-2xx'-2yy'$.
Soit finalement, en développant et en réduisant :
(AB)⊥(CD) équivaut à $xx'+yy'=0$.



Dans l'énoncé du "carré chinois", vérifier que les droites (AB) et (DC) sont parallèles ; et aussi les droites (AD) et (BC).

15.18 Parallélisme dans le plan repéré

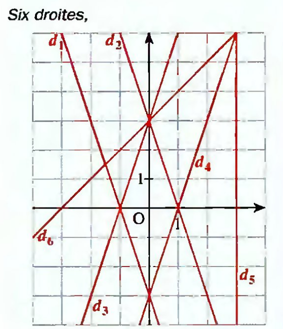
Dans un plan muni d'un repère orthonormal, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x;y)$ et le vecteur $\overrightarrow{CD}$ a pour coordonnées $(x';y')$, alors :

(AB) // (CD) si et seulement si $(x;y)$ est proportionnel à $(x';y')$

ou encore

(AB) // (CD) si et seulement si $xy'-x'y=0$.

Six droites,



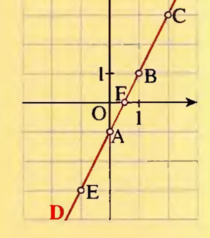
six équations :
- (1) $y=3x+3$
- (2) $y=-3x-3$
- (3) $y=3x-3$
- (4) $x=3$
- (5) $y=x-3$
- (6) $y=x+3$

Reformer les couples (droite ; équation) de manière que l'équation soit celle de la droite.

ÉQUATION D'UNE DROITE

15.19 Une égalité → une droite

Si a et b sont deux nombres, alors :
l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées $(x;y)$ vérifient l'égalité $y=ax+b$ est une droite D.
On dit que "$y=ax+b$" est l'équation de la droite D.

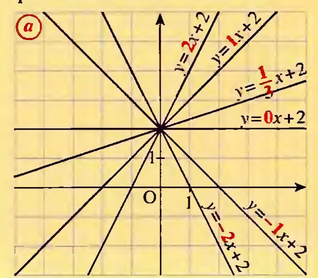


EXEMPLE :
$a=2$
$b=-1$
$y=2x-1$

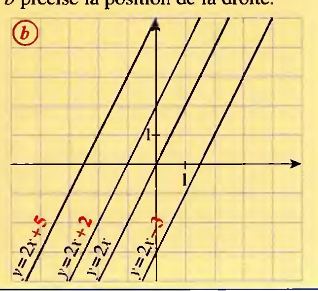
x	0	1	2	−1	0,5	…
y	−1	1	3	−3	0	…
point	A	B	C	E	F	…

15.20 Rôle des coefficients *a* et *b*

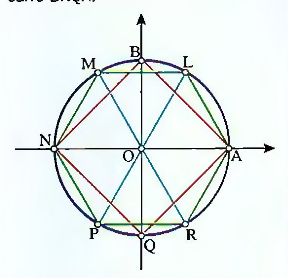
a précise la direction de la droite.



b précise la position de la droite.



■ ***Sur le cercle***
On donne le repère (O,A,B) et on trace l'hexagone régulier ALMNPR et le carré BNQA.



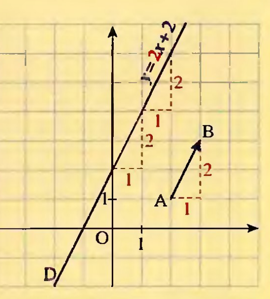
a) *Quelles sont les pentes des droites (NB), (BA) (PL) et (MR)?*
b) *Quelles sont les pentes des droites (AL), (LM) (MN), (NP), (PR) et (AR)?*
c) *Pourquoi a-t-on:*
(PL)//(MN) ?
(AB)⊥(BN) ?
(AL)//(NP) ?

15.21 Vecteur directeur

D est la droite d'équation $y=ax+b$.
Alors:

le vecteur $\vec{v}$ de coordonnées $(1\,;a)$ est un vecteur directeur de la droite.

Le coefficient a est la pente de la droite.



Cela signifie que si (A, B) est un représentant de $\vec{v}$, alors (AB) et D sont des droites parallèles.

REMARQUE:
Si $\vec{v}(1\,;a)$ est un vecteur directeur de la droite, alors $\vec{w}(k\,;ka)$ en est un autre, quel que soit $k\neq 0$.

Et si $(p\,;q)$ est un vecteur directeur d'une droite, alors la pente de cette droite est $\frac{q}{p}$.

15.22 Équation de droites parallèles ou perpendiculaires

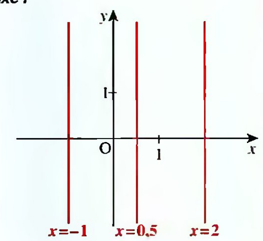
Dans un plan muni d'un repère orthonormal, soit D d'équation $y=ax+b$ et D′ d'équation $y=a'x+b'$.
Alors:

D//D′ si et seulement si $a=a'$.

D⊥D′ si et seulement si $aa'=-1$.

C'est la simple traduction du parallélisme et de l'orthogonalité des vecteurs directeurs respectifs $\vec{v}(1\,;a)$ et $\vec{v}'(1\,;a')$ de D et D′.

Et les droites parallèles au deuxième axe?



Tous les points d'une droite parallèle au deuxième axe ont même abscisse: "l'équation" d'une telle droite droite est donc de la forme x=a.
Elle ne peut pas se mettre sous la forme y=ax+b! Comment la lettre y pourrait-elle ne pas y être écrite?

15.23 Une droite → une égalité

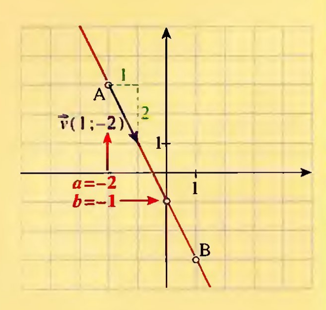
Réciproquement, pour toute droite d'un plan repéré non parallèle au deuxième axe, il existe deux nombres a et b tels que tous les points de D aient leurs coordonnées qui vérifient l'égalité "$y=ax+b$".

15.24 Équation d'une droite passant par deux points donnés

Le plan est muni d'un repère.
Soit dans ce plan A(−2 ; 3) et B(1 ; −3).
Quelle est l'équation de la droite (AB)?

Soit $y=ax+b$ l'équation de la droite (AB).

On peut trouver les coefficients a et b:



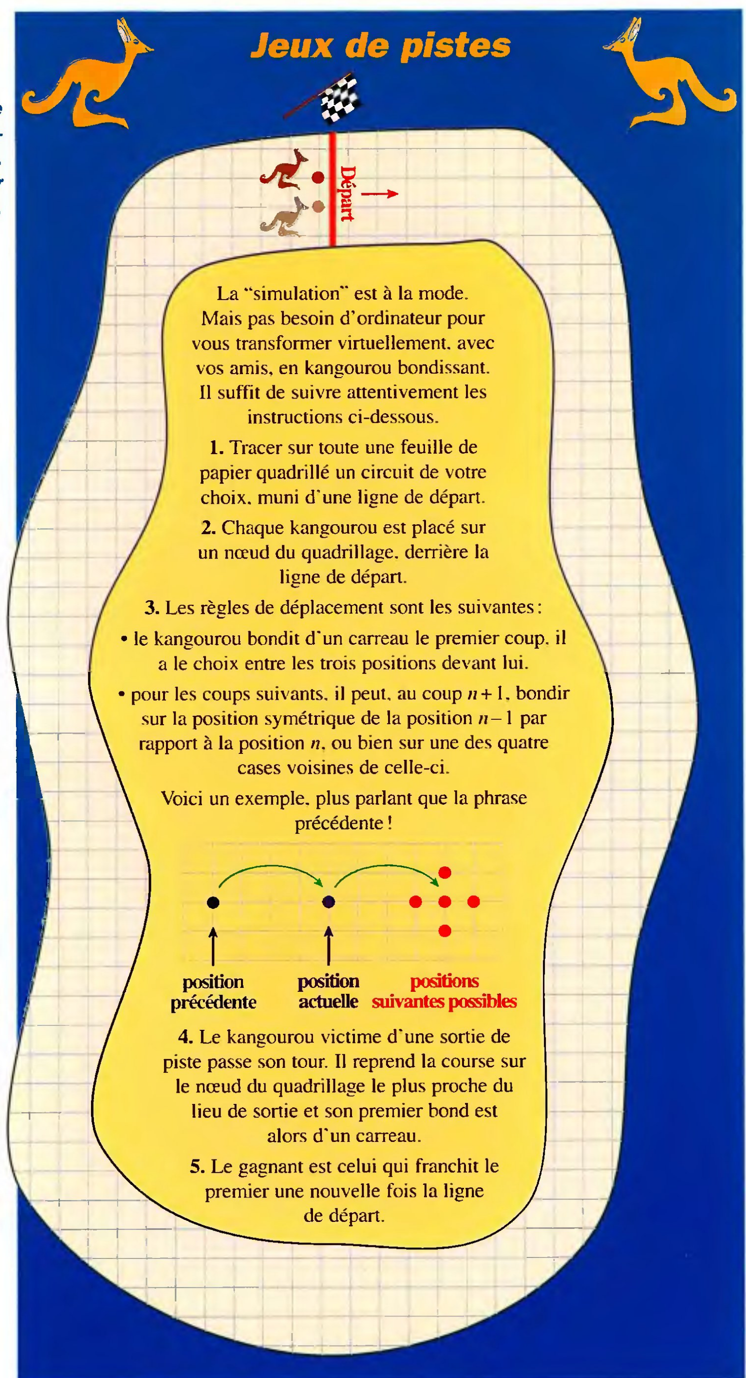
• Par lecture graphique: la droite (AB) coupe le deuxième axe au point d'ordonnée −1 donc $b=-1$. Le vecteur (1 ; −2) est un vecteur directeur de (AB) donc $a=-2$. L'équation de (AB) est $y=-2x-1$.

• Par le calcul, en résolvant un système d'équation: le point A appartient à (AB) donc ses coordonnées vérifient l'équation de (AB) donc $3=-2a+b$.
Le point B appartient à (AB) donc ses coordonnées vérifient l'équation de (AB) donc $-3=a+b$.

On résout le système d'inconnues a et b $\begin{cases}-2a+b=3\\ a+b=-3\end{cases}$ et on trouve $a=-2$ et $b=-1$.

DE POINTS EN POINTS

Quel que soit le "vecteur" de votre déplacement, l'accélération est toujours grisante. Mais il est difficile de tourner sans ralentir...



Des vecteurs de plus en plus longs

V_1 V_2 V_3 V_4 V_5 V_6

On met bout à bout des vecteurs V_1, V_2, ..., V_n de longueurs égales à la valeur de leur indice.

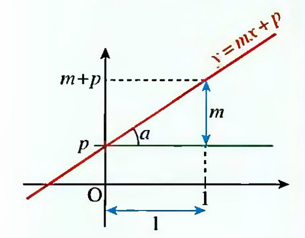
Calculer la longueur de leur somme pour $n=1, 2, 3, ..., 10$.

Dans le jeu ci-contre, combien de coups faut-il, au minimum, pour parcourir 100 carreaux en ligne droite ?

Si on vient de se déplacer de 6 carreaux dans une direction, combien devra-t-on encore parcourir (même en freinant au maximum) dans cette direction sans pouvoir s'arrêter ?

ÉQUATIONS DE DROITES ET TRIGONOMÉTRIE

Une droite de pente m fait avec l'axe des abscisses un angle a tel que tan a=m. Il suffit de regarder la figure :



Prenez la tangente

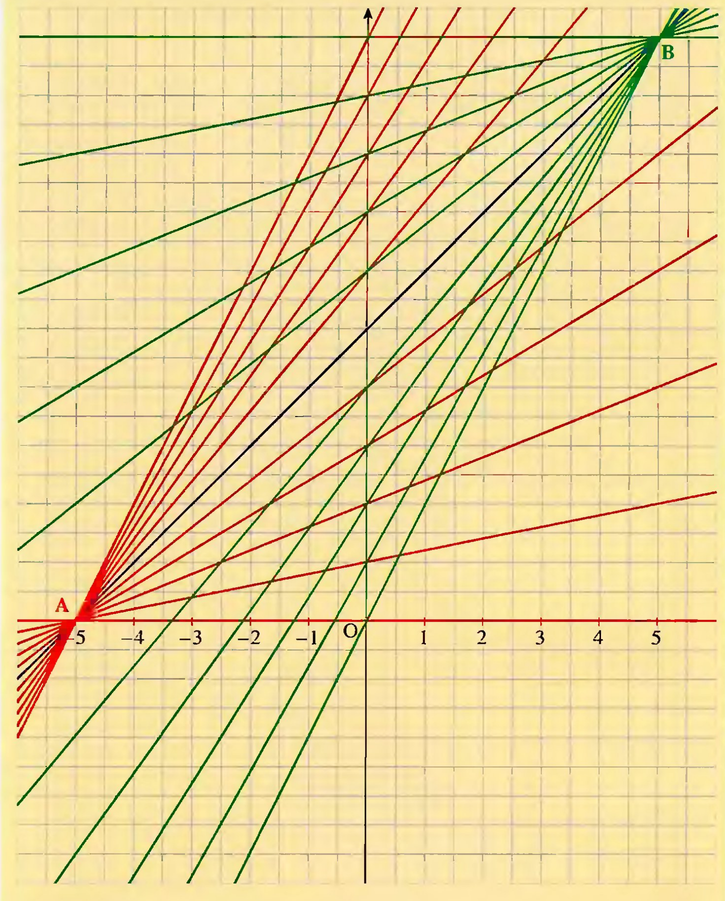
Avec une calculatrice, calculer les angles dont les tangentes sont $\frac{n}{5}$ pour $n=1, 2, ..., 10$.

tangente	angle
0,2	11,3°
0,4	...
0,6	...
0,8	...
1	45°
1,2	...
1,4	...
1,6	...
1,8	...
2	...

■ Que dire de la progression des angles ?

Pentes à gogo

Dans un plan repéré, on a marqué les points A(−5 ; 0) et B(5 ; 10), ainsi que les droites passant par A ou B et les points (0 ; n) pour $n=1, 2, ..., 10$.



Voici les équations des droites passant par A :

$y = 0$
$y = 0{,}2x+1$
$y = 0{,}4x+2$
$y = 0{,}6x+3$
$y = 0{,}8x+4$
$y = x+5$
$y = 1{,}2x+6$
$y = 1{,}4x+7$
$y = 1{,}6x+8$
$y = 1{,}8x+9$
$y = 2x+10$

■ Écrire les équations des droites passant par B. Comparer les coefficients. Il y a des parallélogrammes. Où sont-ils ?

Test 15

Pour chacune des 10 questions, indiquer la ou les bonnes réponses parmi A, B, C, D ou E

	Questions	A	B	C	D	E
1	$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DB}$. Quels sont les parallélogrammes ?	CBAD	ACDB	ABCD	ACBD	DBCA
2	Si $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{RS}$ alors :	$\overrightarrow{MS}=\overrightarrow{NR}$	$\overrightarrow{MS}=\overrightarrow{RN}$	$\overrightarrow{MR}=\overrightarrow{SN}$	$\overrightarrow{RM}=\overrightarrow{SN}$	$\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{SR}$
3	ANGE est un losange de centre O, alors :	$\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{GE}$	$AN=GE$	$\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AE}$	$\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OG}$	$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{NG}$
4	Si A, E, B, I sont alignés dans cet ordre, on a :	$\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EI}=\overrightarrow{AI}$	$AI+IE=AE$	$\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{EI}=\overrightarrow{EB}$	$\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{AB}$	$AB+IB=AI$
5	$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}=\cdots$	$\overrightarrow{BC}$	$\vec{0}$	$\overrightarrow{BD}$	$\overrightarrow{DB}$	$\overrightarrow{DD}$
6	$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}=\cdots$	$-\overrightarrow{AB}$	$\vec{0}$	$\overrightarrow{BB}$	$\overrightarrow{CA}$	$\overrightarrow{CB}$
7	Quel est l'abscisse de M ? (M, 0, 1)	-2	-1	$-1,5$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$
8	Quel est l'abscisse de M ? (0, 1, M)	$\frac{5}{4}$	2	4	$\frac{4}{3}$	$1+\frac{1}{3}$
9	Quelles sont les coordonnées de M dans le repère (O,I,J) ? (M, J, O, I)	$(2;-1)$	$(2;1)$	$(1;-2)$	$(-2;1)$	$(-2;-1)$
10	Quelles sont les coordonnées de M dans le repère (O,I,J) ? (J, M, O, I)	$(1;1)$	$(0;-1)$	$(1;-1)$	$(-1;0)$	$(-1;1)$

THÈME 16

De la mesure en toutes choses

Se partager l'espace est devenu rapidement une préoccupation essentielle de l'humanité. Le géomètre, comme son nom l'indique, a eu pour mission de mesurer la Terre. On a mesuré les longueurs des choses à une dimension, puis les aires de celles qui ont deux dimensions, puis les volumes de celles qui ont trois dimensions. Et c'est comme çà que tout a commencé…

Longueurs, aires et volumes

Longueurs, aires et volumes sont des **mesures** du latin *mensura* (qui a aussi donné **mensuration**), mot tiré du verbe *metiri*, signifiant **mesurer**, et dont le participe *mensus* a donné *dimensio* : la dimension est la mesure d'une chose entre ses deux extrémités.

Unités

Les anglo-saxons ont longtemps résisté, mais il vaut mieux, dans notre système de numération, partager en dix qu'en douze ou soixante.

Périmètres, aires et volumes

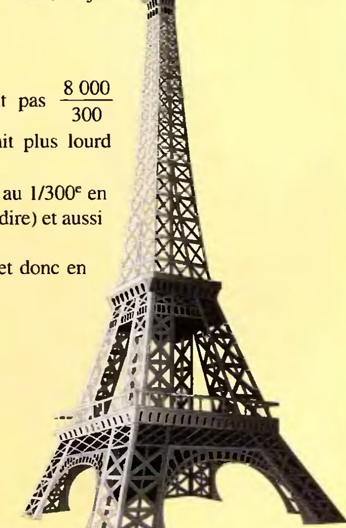
Une longueur peut être proportionnelle à une autre ($r \mapsto 2\pi r$), une aire à un produit de deux longueurs ou au carré d'une certaine longueur ($r \mapsto \pi r^2$), un volume à un produit de trois longueurs ou au cube d'une certaine longueur ($r \mapsto \frac{4}{3}\pi r^3$).

Changements d'unités

Attention, quand on coupe en 10 le côté d'un carré, on récolte 100 petits carrés et quand on coupe en 10 le côté du cube, on fait naître 1000 bébés cubes. Cela joue dangereusement sur les déplacements de virgule !

Les miniatures de la Tour Eiffel

LA TOUR EIFFEL, 300 *mètres de hauteur, est entièrement construite en fer et pèse* 8 000 *tonnes.*
On veut construire un modèle réduit de la Tour, en fer aussi et de 1 mètre de haut.
Quel sera son poids ?



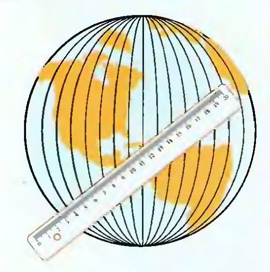
ATTENTION : le résultat n'est sûrement pas $\frac{8\,000}{300}$ tonnes, soit environ 27 tonnes (ce serait plus lourd qu'un mètre-cube de fer !)
La Tour Eiffel est non seulement réduite au 1/300e en hauteur, mais aussi en largeur (si on peut dire) et aussi en épaisseur (si on peut encore dire).
Le coefficient de réduction en volume (et donc en matière utilisée) est de

$$\frac{1}{300} \times \frac{1}{300} \times \frac{1}{300} = \frac{1}{2\,700\,000}.$$

Le modèle réduit pèse donc, en kilo, $\frac{8\,000\,000}{2\,700\,000}$, soit $\frac{8}{27}$ kg.

Environ 300 grammes !

Se mettre d'accord sur une unité de longueur a pris du temps; on y est arrivé à la fin du 18ème siècle. On a voulu la définir à partir de grandeurs physiques fixes mais peu précises : millionième partie du quart du méridien terrestre.



UNITÉS

16. 1 Longueurs

L'unité de longueur est le mètre.

Nous sommes dans le système décimal : ses multiples et sous-multiples diffèrent d'un facteur 10 (voyez page 27 le nom des préfixes à utiliser : déca, hecto, kilo, ..., déci, centi, milli, ...).

Pour les vraiment grandes distances, on vous propose l'**année-lumière** (distance parcourue par la lumière en une année, soit à peu près 9500 milliards de km, soit presque 10^{16} mètres)

Pour les petits objets, on préfére le **micro-mètre** qui vaut 10^{-6} mètre.

16. 2 Aires

$1\,m^2$ est l'aire d'un carré de 1 m de côté.

Ses multiples et sous-multiples diffèrent d'un facteur 100.

16. 3 Volumes

$1\,m^3$ est le volume d'un cube de 1 m de côté.

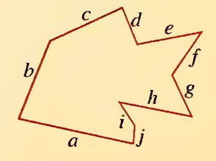
Ses multiples et sous-multiples diffèrent d'un facteur 1000.

Lorsque toutes les longueurs mesurées sur un objet sont multipliées par un nombre k, les aires sont multipliées par k^2 et les volumes par k^3. Cela traduit le fait que "mesurer une aire", c'est mesurer un objet de dimension 2, et "mesurer un volume", c'est mesurer un objet de dimension 3.

PÉRIMÈTRES

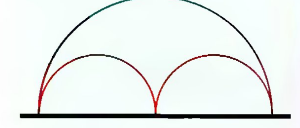
16. 4 Périmètre d'un polygone

Le périmètre d'un polygone, c'est la longueur du tour de ce polygone autrement dit la somme des longueurs de ses côtés.



Le périmètre de cette figure est :
$a+b+c+d+e+f+g+h+i+j$.

Sauts de puces
Le petite puce a fait deux sauts demi-circulaires ; la grande n'a fait qu'un bond.
Laquelle des deux a parcouru la plus longue trajectoire ?

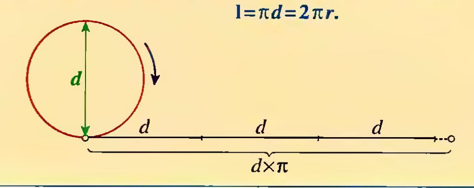


16. 5 Longueur du cercle

Il y a proportionnalité entre le diamètre du cercle et sa longueur. Le coefficient de cette proportionnalité n'est pas un nombre décimal : c'est le nombre π, dont les calculatrices donnent une valeur approchée (3,141592...).

Si r est le rayon du cercle, d son diamètre, et l sa longueur :

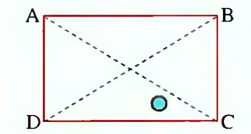
$$l=\pi d=2\pi r.$$



Et puits, alors...

Jean a un champ rectangulaire, avec un puits, qui se trouve être plus près de l'un des coins du champ que les autres.
Il veut partager équitablement son champ entre ses deux fils.

■ ***Proposez un découpage où chacun des deux ait accès au puits.***



■ AIRES

Deux surfaces sont de même aire si on peut, en découpant l'une, recouvrir exactement l'autre. Les formules d'aire du carré et du rectangle tiennent au sens même de la multiplication. Les autres formules d'aire de polygones en découlent.

16. 6 Aire du carré

L'aire d'un carré de côté c est :

$c \times c = c^2$.

16. 7 Aire du rectangle

L'aire d'un rectangle de longueur L et de largeur ℓ est :

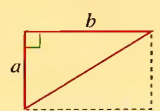
$L \times \ell$.

16. 8 Aire du triangle rectangle

L'aire d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent a et b est :

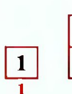
$\dfrac{a \times b}{2}$.

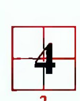
Un triangle rectangle,
c'est la moitié d'un rectangle...

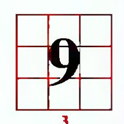


Attention !

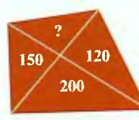
Quand on multiplie par k tous les côtés d'un polygone, son aire est multipliée par k^2.







La part du gâteau



Un curieux gâteau quadrangulaire a été partagé en quatre parts le long des diagonales.
Les trois parts dessinées pèsent 200g, 150g et 120g.

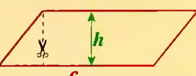
■ ***Combien pèse la dernière ?***

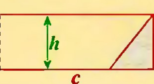
Pensez à ceci : *à hauteur égale, les aires de deux triangles sont proportionnellles à leurs bases.*

16. 9 Aire du parallélogramme

L'aire d'un parallélogramme de côté c et de hauteur h correspondant à ce côté est :

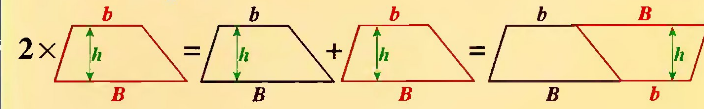
$c \times h$.





16.10 Aire du trapèze

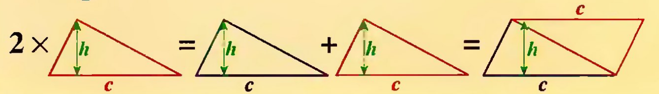
L'aire d'un trapèze dont les bases mesurent b et B et dont la hauteur est h est : $\dfrac{(B+b) \times h}{2}$.

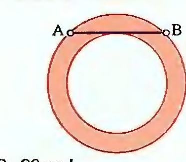


16.11 Aire du triangle

L'aire d'un triangle dont un côté mesure c, dont la hauteur correspondante est h est :

$\dfrac{c \times h}{2}$.

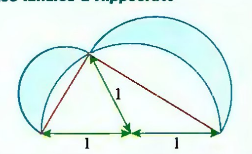




AB=20cm !

Quelle est l'aire de l'anneau colorié ?

Les lunules d'Hippocrate



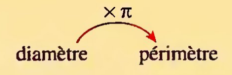
On construit trois demi-cercles sur les trois côtés d'un triangle rectangle.

Quelle est l'aire des lunules coloriées ?

16.12 Aire du disque

L'aire d'un disque de rayon r est :

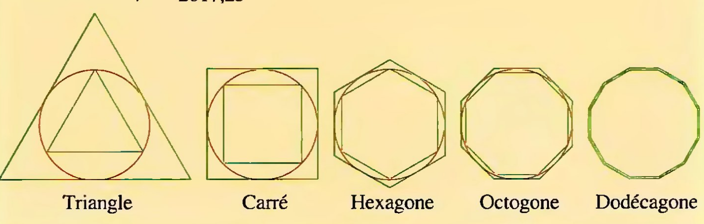
$\pi \times r \times r = \pi r^2$.



× π — carré du rayon → aire

Miracle : pour un disque, le coefficient de proportionnalité entre carré du rayon et aire et le même qu'entre diamètre et périmètre !

C'est à Archimède que revient l'idée de coincer le disque entre des polygones réguliers intérieurs et extérieurs ayant de plus en plus de côtés pour approcher de plus en plus finement l'aire du disque. Il en déduisit de bonnes approximations rationnelles du nombre π : $\frac{22}{7}$; $\frac{6\,336}{2017{,}25}$,...



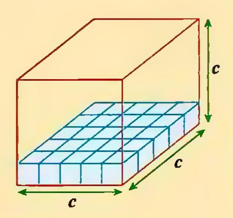
VOLUMES

16.13 Volume du cube

Le volume d'un cube de côté c est :

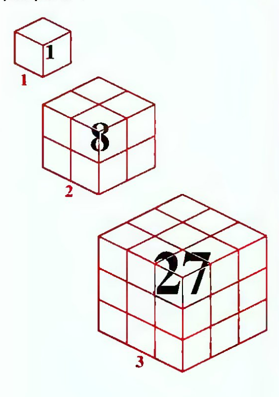
$c \times c \times c = c^3$.

c "couches" de "$c \times c$" petits cubes



Attention !

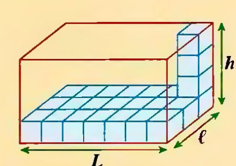
Quand on multiplie par k le côté d'un cube, le volume, lui, se trouve multiplié par k^3.



16.14 Volume du pavé droit

Le volume d'un pavé droit de longueur L, largeur ℓ et hauteur h est :

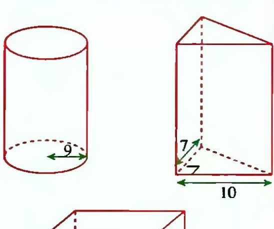
$\ell \times L \times h$.

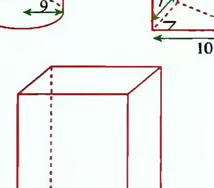


Lorsque les dimensions sont des multiples entiers d'une certaine unité, cette formule résulte d'une simple interprétation de la multiplication.

Pluie

■ ***S'il tombe un litre d'eau dans chacun de ces récipients, dans lequel l'eau montera-t-elle le plus haut ?***

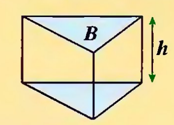


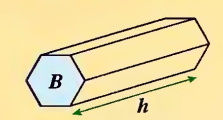


16.15 Volume du prisme

Le volume d'un prisme dont l'aire de la base est B et la hauteur h est :

$B \times h$. (Et cela même si le prisme n'est pas droit.)





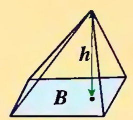
Les formules pour le cube et le pavé droit sont des cas particuliers de cette formule.

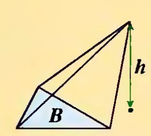
ATTENTION :
l'aire de la base et la hauteur doivent être exprimées dans des unités "compatibles".

16.16 Volume d'une pyramide

Le volume d'une pyramide dont l'aire de la base est B et la hauteur h est :

$$\frac{B \times h}{3}.$$



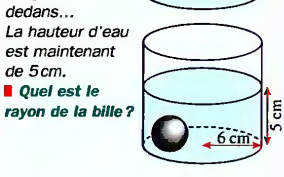


Le rétrécissement dû à la forme en pointe de la pyramide est considérable : le volume est divisé par 3, par rapport à celui d'un prisme de même base.

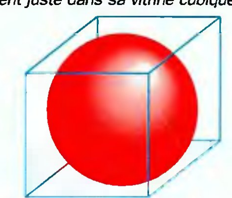
Plouf !!

Un cylindre de 6 cm de rayon de base contient une hauteur d'eau de 4 cm. J'ai jeté une bille dedans... La hauteur d'eau est maintenant de 5 cm.

■ ***Quel est le rayon de la bille ?***



Au musée du bouliste, cette boule tient juste dans sa vitrine cubique.



■ ***Remplit-elle plus ou moins de la moitié du volume disponible ?***

16.17 Volume du cylindre

Le volume d'un cylindre de rayon r et de hauteur h est :

$$\pi \times r^2 \times h.$$

Cette formule est agréablement cohérente avec celle qui concerne les prismes.

16.18 Volume du cône

Le volume d'un cône de rayon r et de hauteur h est :

$$\frac{\pi \times r^2 \times h}{3}.$$

Cette formule est agréablement cohérente avec celle qui concerne les pyramides.

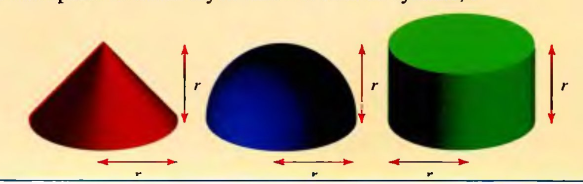
16.19 Volume de la boule

Le volume d'une boule de rayon r est :

$$\frac{4}{3}\pi \times r^3.$$

Il y a proportionnalité entre le volume de la sphère et le cube de son rayon. Quand au coefficient de proportionnalité, il faut l'apprendre si on veut le connaitre.

REMARQUE : si un cône de rayon r, de hauteur r a un volume égal à 1, alors le volume de la demi-sphère de même rayon vaut 2 et celui du cylindre, 3!



LES CHANGEMENTS D'UNITÉS

16.20 Les longueurs

Lorsque les calculs deviennent délicats, suivez nos conseils, car il est facile de se tromper avec les diverses unités de mesures :

1. Utiliser du papier quadrillé et écrire la mesure, dans un certaine unité, en écrivant 1 chiffre par colonne.

par exemple | | | | |2|7,|4| | | | | mètres

2. Compléter l'écriture par des zéros à gauche et à droite (après la virgule) :

| |0|0|0|2|7,|4|0|0|0| |

3. On peut alors lire la mesure dans n'importe laquelle des unités multiples ou sous-multiples du mètre.

Par exemple, on lit :

27,4 mètres = 27 400 millimètres = 0,274 hectomètres.

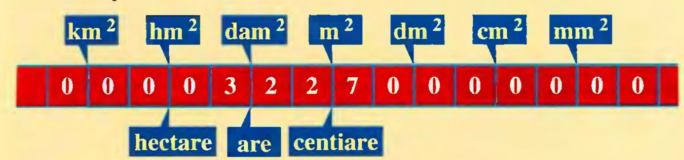
0	0	0	2	7,	4	0	0	0
	kilomètres	hectomètres	décamètres	mètres	décimètres	centimètres	millimètres	

16.21 Les aires

Si les longueurs d'une figure sont multipliées par 10, la surface de cette figure est multipliée par 100. Donc, pour passer d'une unité d'aire à l'unité dix fois plus grande, on déplace la virgule de DEUX CHIFFRES vers la gauche.

Pratiquement :

1. Écrire la mesure en mettant bien 1 chiffre par colonne. Placer la virgule correspondant à l'unité qui a servi pour cette mesure.
2. Écrire des zéros avant et après les chiffres déjà écrits.
3. Repérer les places de la virgule correspondant aux différentes unités, en prenant deux chiffres par unité successive.



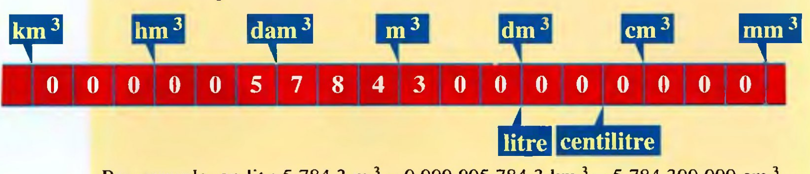
Par exemple, on lit : 322,7 m ^{2} = 0.03227 hm ^{2} = 32 270 dm ^{2}.

16.22 Les volumes

Si les longueurs d'un objet sont multiplées par 10, le volume de cet objet est multiplié par 1 000. Donc, pour passer d'une unité de volume à l'unité 10 fois plus grande, on déplace la virgule de TROIS CHIFFRES vers la gauche.

Pratiquement :

1. Écrire la mesure en mettant bien 1 chiffre par colonne. Placer la virgule correspondant à l'unité qui a servi pour cette mesure.
2. Écrire des zéros avant et après les chiffres déjà écrits.
3. Repérer les places de la virgule correspondant aux différentes unités, en prenant trois chiffres par unité successive.



Par exemple, on lit : 5 784,3 m ^{3} = 0.000 005 784 3 km ^{3} = 5 784 300 000 cm ^{3}.

À retenir

1 are, c'est un champ carré de 10 mètres sur 10 mètres.
100 ares, un hectare, c'est un carré de 100 mètres sur 100 mètres.

Attention

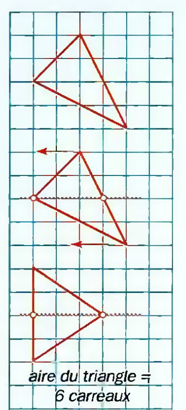
1 litre c'est un cube de 10 cm de côté. 1 litre vaut donc 1 000 fois un cube de 1 cm de côté :
1 litre = 1 000 cm ^{3}.
Il ne faut donc pas confondre un centilitre et un centimètre cube.
1 centilitre = 10 cm ^{3}.
1 centilitre est un cube de 2,15 cm de côté !

Les calculs d'aires sont à la fois affaire de connaissances et d'astuces. Voici, clés en main, cinq "trucs" bien utiles pour les calculer.

A *L'aire d'une surface ne change pas si l'on découpe certains morceaux pour les recoller ailleurs.*

B *Apprenez les formules d'aires et sachez ceci :*
— la diagonale d'un rectangle partage celui-ci en deux triangles d'aires égales.
— la médiane d'un triangle partage celui-ci en deux triangles d'aires égales.

C *Dans les problèmes d'aire sur quadrillage, il est bon de savoir que si l'on déplace un sommet du triangle parallèlement à un côté, son aire ne change pas.*



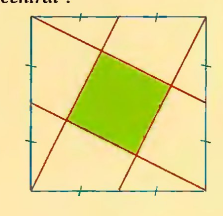
D *À hauteur égale, l'aire d'un triangle est proportionnelle à sa base.*

E *Si l'on multiplie les côtés d'un polygone par k, son aire est multipliée par k^2.*

16.23 Des exemples-types : Outils de calcul d'aires

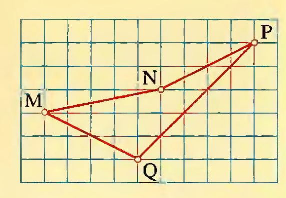
Le kangourou est un animal préoccupé par son espace vital. Du coup, les problèmes comportant des questions sur les aires abondent dans le jeu-concours qui porte ce nom.
■ Voici des exemples qui montrent que le Kangourou ne manque pas d'aire.

1. Kangourou 94 cadets
Le grand carré a pour aire 1 m^2.
Quelle est en m^2, l'aire du petit carré central ?



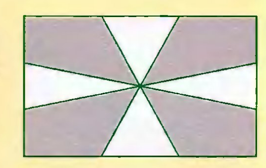
A $\frac{1}{3}$
B $\frac{1}{4}$
C $\frac{1}{5}$
D $\frac{1}{6}$
E on ne peut pas savoir.

2. Kangourou 95 cadets
Quelle est l'aire, en carreaux, du quadrilatère MNPQ *?*



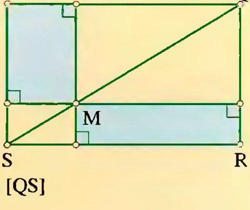
A 8
B 10
C 11
D 12
E 13

3. Kangourou 97 cadets
Chaque côté d'un rectangle est divisé en trois segments de même longueur ; les points obtenus sont reliés de manière à obtenir le drapeau ci-contre.
Combien vaut le quotient de l'aire de la partie blanche par celle de la partie grisée ?



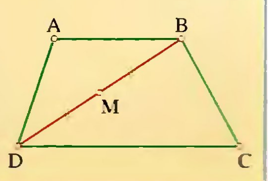
A 1 B $\frac{1}{2}$
C $\frac{1}{3}$ D $\frac{1}{4}$ E $\frac{2}{3}$

4. Kangourou 95 cadets
Le quadrilatère PQRS est un rectangle, et M est un point de la diagonale [QS].
Que peut-on dire des deux surfaces grisées ?



A celle du haut est la plus grande
B celle du bas est la plus grande
C elles ont toujours une aire égale
D les aires sont égales seulement si M est le milieu de [QS]
E il n'y a pas assez de données

5. Kangourou 95 benjamins
ABCD est un trapèze. M est le milieu de la diagonale [BD]. Parmi les égalités ci-dessous, l'une n'est pas toujours vraie. *Laquelle ?*



A aire AMB = aire AMD B aire MBC = aire MDC
C aire ABD = aire ABC D aire ADC = aire BDC
E aire AMD = aire MBC.

LE THÉOREME A*a*

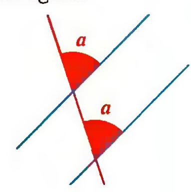
Les mathématiques, disait Galilée, sont le langage de l'Univers.

Et il est bien vrai que les mathématiques donnent des réponses aux questions posées par notre monde.

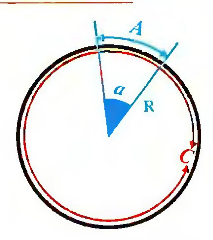
Ainsi, pour mesurer notre Terre, il a fallu que les savants d'Alexandrie, il y a plus de 2000 ans, connaissent au moins deux théorèmes de géométrie

Un théorème d'Euclide

Deux droites parallèles font, avec une même sécante, des angles égaux.



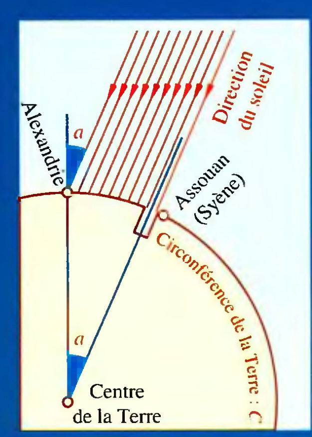
Le théorème A*a* !



Un secteur angulaire ayant son sommet au centre d'un cercle coupe ce cercle suivant un arc ; la longueur de cet *Arc* est proportionnelle à la mesure de l'*angle* du secteur.

angle mesuré en degré	longueur de l'arc
a	A
360	$2\pi R$

Comment mesurer la terre ?



Au III[e] siècle avant J.-C., ÉRATOSTHÈNE avait déjà compris que la terre était ronde, et il avait su évaluer son rayon.

Pour cela, il fit quelques observations : ainsi un certain jour du mois de juin, à midi, il remarqua que le soleil se reflétait au fond d'un puits près d'Assouan, et se trouvait donc certainement au zénith. Ce même jour, à la même heure, dans la ville d'Alexandrie, le soleil ne se trouvait pas exactement au zénith.

Érastosthène fit alors mesurer, juste à cet instant, l'angle a entre la direction du soleil et le zénith à Alexandrie : il trouva $a = 7{,}15°$.

Pour s'assurer de la simultanéité des mesures, il suffisait de réaliser les mesures au moment où le soleil passait à son point le plus haut dans le ciel d'Alexandrie. Puis, il fit mesurer la distance d'Assouan (qui s'appelait alors Syène) à Alexandrie : il trouva 5000 stades.

En appliquant le théorème A*a*, il trouva la circonférence C de la Terre :

$$7{,}15 \times C = 360 \times 5000$$

$$C = \frac{360 \times 5000}{7{,}15} = 251\,750 \text{ (en stades).}$$

Sachant qu'un "stade" valait environ 160 de nos mètres, la mesure obtenue par Ératosthène est remarquablement précise : en effet, on trouve environ 40 000 km, et donc 6 400 km de rayon.

Bien avant Galilée, les savants d'Alexandrie connaissaient bien la forme de la Terre ; voici le genre de carte que Ptolémée (II[e] siècle) avait pu dessiner. Comment une telle régression des connaissances avait-elle été possible en quatorze siècles ?

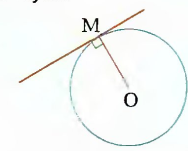


LE THÉORÈME DU MICROSCOPE

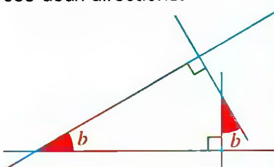
Connaissant les dimensions de la Terre, quelques bons théorèmes de géométrie et faisant quelques mesures d'angles, on peut entamer une chaîne de déductions nous amenant à la distance Terre-Lune puis au diamètre de la Lune, puis à celui du Soleil...

Deux théorème euclidiens

• La tangente en M à un cercle est perpendiculaire à son rayon.



• Deux droites perpendiculaires à deux directions font entre elles le même angle que ces deux directions.



Le théorème du microscope

Faites l'expérience suivante : percez une feuille de papier d'un petit trou.
Posez ce petit trou sur le bord de la circonférence d'un cercle. Voit-on un arc de cercle ou un segment de droite ?
Le résultat de cette expérience traduit le théorème mathématique suivant :

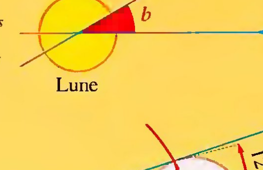
Un très petit arc de cercle est très voisin d'un segment de droite.

Comment mesurer la lune ?

• On place deux observateurs M et N sur la surface de la Terre de manière qu'ils voient tous les deux la Lune exactement à l'horizon. Mesurant alors la distance A des deux observateurs sur la Terre, on peut en déduire l'angle a et donc l'angle supplémentaire b.

Les mesures donnent pour l'angle b une valeur égale à 1,9°.

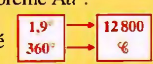
(Sur la figure nous avons rapproché la lune pour mieux voir les propriétés des angles.)



• On sait d'autre part que le diamètre de la Terre est d'environ 12 800 kilomètres. D'après le théorème du microscope, l'arc de cercle en rouge ci-contre mesure donc environ lui aussi 12 800 kilomètres.

On peut alors se servir du théorème Aa !

Du tableau de proportionnalité



1,9°	12 800
360°	$\mathscr{C}$

, on déduit $\mathscr{C} \times 1,9 = 12\,800 \times 360$.

D'où $\mathscr{C} = \dfrac{12\,800 \times 360}{1,9} \simeq 2\,425\,000$.

Puisque $\mathscr{C} = 6,28 \times d$, on a finalement $d = \dfrac{2\,425\,000}{6,28} \simeq 385\,000$.

La Lune est donc environ à 385 000 kilomètres de la Terre...

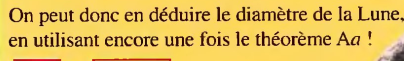
• La Lune parcourt autour de la Terre une distance égale à $\mathscr{C}$, soit 2 425 000 km.

D'après le théorème du microscope, on peut approcher le diamètre de la lune par le petit arc de cercle marqué en rouge sur la figure ci-dessous.



Cet arc est vu, de la Terre, sous un angle que l'on sait mesurer. Il vaut un petit peu plus d'un demi-degré.

On peut donc en déduire le diamètre de la Lune, en utilisant encore une fois le théorème Aa !



0,5°	2 425 000
360°	L

$0,5 \times 2\,425\,000 = 360 \times L$.

D'où $L = \dfrac{0,5 \times 2\,425\,000}{360} \simeq 3\,368$ km.



Des mesures plus précises montrent que la valeur exacte du diamètre de la Lune est de 3 476 km.

Carte de la Lune établie par Cassini en 1860

Test 16

Pour chacune des 10 questions, indiquer la ou les bonnes réponses parmi A, B, C, D ou E

	Questions	A	B	C	D	E
1	Un décimètre carré, c'est…	$10\ cm^2$	$100\ cm^2$	$0{,}1\ m^2$	$0{,}01\ m^2$	$1000\ mm^2$
2	Un triangle est découpé en deux triangles d'aires égales par…	sa médiatrice	sa hauteur	sa médiane	sa bissectrice	aucune des quatre
3	Deux rectangles de mêmes aires ont…	des côtés égaux	des angles égaux	mêmes périmètres	mêmes proportions	mêmes diagonales
4	L'aire d'un disque est proportionnelle…	à son périmètre	à son rayon	à son diamètre	au carré de son rayon	au carré de son diamètre
5	L'aire d'une figure est conservée sous l'action d'une…	symétrie centrale	symétrie orthogonale	projection	translation	rotation
6	Un disque a une aire de $2500\pi\ cm^2$. Son rayon vaut…	50 dm	5 cm	0,5 m	50 cm	500 mm
7	L'aire de la France, c'est environ…	$5440\ km^2$	$54400\ km^2$	$544000\ km^2$	$5440000\ km^2$	$54400000\ km^2$
8	10 cm / 10 cm — Le volume du cylindre, c'est…	$100\ cm^3$	$100\pi\ cm^3$	$25\pi\ cm^3$	$250\ cm^3$	$250\pi\ cm^3$
9	10 cm / 1 dm / 2 mm — Le volume du parallélépipède, c'est…	$2\ cm^3$	$200\ cm^3$	$0{,}2\ cm^3$	$20\ dm^3$	$20\ cm^3$
10	Le volume de ma boule vaut 36π. Quel est son rayon ?	1	3	5	2π	$\frac{4}{3}\pi$



La belle oubliée

Le Kangourou vous en donne plus ! Voici une grande disparue des programmes de collège : l'étude des nombres entiers, connue sous le nom d'arithmétique.
Regrettée de tous pour ses charmes propres, elle nous manque encore souvent pour simplifier des fractions ou les réduire au même dénominateur.
Est-il même raisonnable, aujourd'hui, d'ignorer la différence entre "nombres premiers" et "premiers nombres" ?

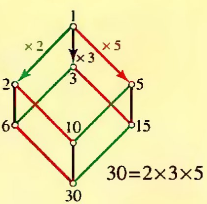
Arithmétique

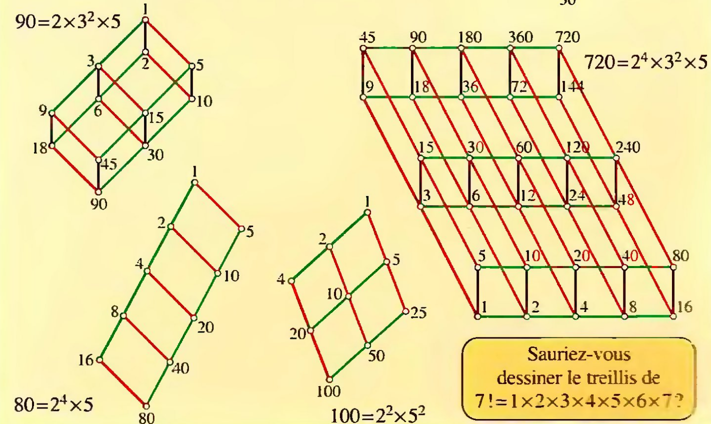
Arithmétique : du grec *arithmos*, nombre.

- **Multiples et diviseurs**
  Les tables de multiplication ont été dures à apprendre, mais aujourd'hui quel plaisir de décomposer un nombre en produit au premier coup d'œil.
- **Nombres premiers**
  Ce sont des nombres qui n'ont presque pas de diviseurs. Il y en a une infinité et les mathématiciens en débusquent chaque jour de nouveaux.
- **PPCM et PGCD**
  Sous ces sigles barbares, deux outils bien utiles qui servent beaucoup dans les calculs sur les fractions.

Les treillis de diviseurs

QU'EST CE QU'UN CUBE ? Pour un fan de la théorie des nombres, c'est une représentation de la structure de l'ensemble des diviseurs de 30 !
Comment cela ? La règle du jeu consiste à représenter par un même vecteur une même multiplication.
Les dessins obtenus s'appellent des *treillis* et leur réalisation est à la fois amusante et intéressante…





Sauriez-vous dessiner le treillis de 7!=1×2×3×4×5×6×7 ?

MULTIPLES ET DIVISEURS

L'histoire se passe au pays des nombres entiers naturels. Il était une fois, dans ce pays une opération, la multiplication qui vivait en bonne intelligence avec son inverse la division.

A. 1 Multiples d'un nombre

Si a et b sont deux entiers naturels, alors :
s'il existe un entier k tel que $b=k\times a$, on dit que b est multiple de a.

EXEMPLE :
0, 6, 12, 18, 24, 30, … 60, 66, 360, 600 sont des multiples de 6.

REMARQUES :
0 est multiple de tous les entiers : en effet, quel que soit le nombre a, $0=0\times a$.
Tout nombre est multiple de lui-même ; en effet, quel que soit le nombre a, $a=1\times a$.
Le nombre 1 n'est multiple que de lui-même.

NOTE :
Si $b=k\times a$, alors b est multiple de a, mais aussi, multiple de k.

A. 2 Reconnaître les multiples…

… de 2 : ils se terminent par 0, 2, 4, 6 ou 8.
… de 3 : la somme de leurs chiffres est multiple de 3.
… de 5 : ils se terminent par 0 ou 5.
… de 9 : la somme de leurs chiffres est multiple de 9.
… des autres : en posant des divisions.

A. 3 Diviseurs d'un nombre

Si la division entière (voir **2.7**) de a par b tombe juste (son reste est 0), on dit que b est un diviseur de a. On a alors : $a=b\times q$.

Autrement dit, les phrases
"b est un diviseur de a" et "a est un multiple de b"
sont des phrases équivalentes.

REMARQUES :
Le nombre 1 est un diviseur de tous les entiers.
Tout nombre est diviseur de lui-même ($a\div a$, quotient 1, reste 0)
Le nombre 0 n'est un diviseur de personne mais tout nombre non nul divise 0.

Les nombres premiers sont en nombre infini.
La démonstration que voici figure déjà dans les éléments d'Euclide :
Soit N un nombre choisi très grand.
Eh bien, on peut à coup sûr fabriquer un nombre premier plus grand encore que N.
Pour cela on fabrique le nombre P obtenu en multipliant tous les nombres inférieurs à N et en ajoutant 1 à ce produit.
Ce nombre P n'est divisible par aucun des nombres inférieurs à N (à cause de l'ajout de 1, le reste de la division de P par tout nombre inférieur à N vaut 1).
Donc de deux choses l'une :
ou bien P est premier, ou bien P est divisible par un nombre premier P' plus grand que N.
P ou P' fournissent ainsi un nombre premier plus grand que N.

NOMBRES PREMIERS

A. 4 Définition

Un nombre qui n'admet comme diviseur que lui-même et 1 est appelé nombre premier.

Le nombre 1 lui-même est, par convention, exclu de la liste des nombres premiers.

EXEMPLE :
5 est un nombre premier : il n'a comme diviseur que lui-même et 1.
11 est un nombre premier.
143 n'est pas un nombre premier car $143=13\times 11$ donc 143 a pour diviseurs 1, 11, 13 et lui-même.

La distribution des nombres premiers est très irrégulière !
Les mathématiciens se posent la question de leur répartition depuis longtemps mais n'ont que partiellement éclairci le problème. Ce qui est sûr, c'est qu'ils vont en se raréfiant : ils sont 168 entre 0 et 1000, 81 entre 100000 et 101000, et 2 seulement entre 10^{100} et $10^{100}+1000$.

A. 5 Le crible d'Eratosthène

Le mathématicien grec Eratosthène qui vivait à Alexandrie aux alentours de 200 avant J.-C. est réputé être l'auteur de l'astucieuse méthode ci-dessous.

On dresse la table des nombres de 1 à 100. On barre 1 qui n'est pas premier. On garde 2, qui est premier, mais on raye tous ses multiples, les nombres pairs. On garde 3, mais on raye tous ses multiples non encore barrés. Et ainsi de suite…

À chaque étape, le prochain nombre non barré est forcément premier (il n'est multiple d'aucun nombre plus petit que lui, sinon il aurait été rayé).

On peut s'arrêter dès qu'on a rayé les multiples de 7. En effet 11 est le nombre premier qui suit 7. Et le premier multiple de 11 non encore barré sera $11 \times 11 = 121$, qui n'est pas dans la liste (trop loin).

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Il est bon de connaître le début de la liste ordonnée des nombres premiers inférieurs à 100 issue du crible ci-contre :

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 et 97.



113 → divisible par 2 ?
Non (dernier chiffre)
113 → divisible par 3 ?
Non (1+1+3=5)
113 → divisible par 5 ?
Non (dernier chiffre)
113 → divisible par 7 ?
Non : 113 | 7
43 | 6
(1)
113 → divisible par 11 ?

Plus la peine de se fatiguer : si 113 avait été multiple de 11, il aurait été multiple d'un nombre entier plus petit car $11 \times 11 = 121$ (trop grand pour 113).

A. 6 Reconnaître un nombre premier

Pour reconnaître si un nombre entier a est premier, on utilise le même truc que dans le crible :
– On prend le premier nombre premier de la liste dans l'ordre ci-dessus et on regarde si a en est multiple.
– Si oui, a n'est pas premier.
– Si non, on fait de même avec le nombre premier suivant.
– Si on atteint un nombre premier dont le carré dépasse a, on peut conclure que a est premier.

A. 7 Décomposer en produit de nombres premiers

Voici un théorème important :

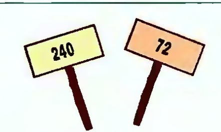
Tout nombre entier peut s'écrire d'une unique manière comme produit de nombres premiers.

EXEMPLE :
Pour écrire 812 comme produit de nombres premiers, on effectue des divisions successives

Disposition pratique :

812	2				
0	406	2			
	0	203	7		
		0	29	29	
			0	1	

$812 = 2 \times 2 \times 7 \times 29$.



$240 = 2^4 \times 3 \times 5$
$72 = 2^3 \times 3^2$

PPCM de 240 et 72 :
$2^4 \times 3^2 \times 5$, c'est 720.
Prendre tous les facteurs premiers présents dans l'une ou l'autre décomposition avec l'exposant le plus grand.

$(2^4 \times 3 \times 5) \times 3 = 240 \times 3$
$(2^3 \times 3^2) \times 2 \times 5 = 72 \times 10$

PGCD de 240 et 72 :
$2^3 \times 3$, c'est 24.
Prendre tous les facteurs premiers communs aux deux décompositions avec l'exposant le plus petit.

$240 = (2^3 \times 3) \times 2 \times 5$
$72 = (2^3 \times 3) \times 3$

PPCM - PGCD

A. 8 Plus petit commun multiple

Dans la liste des multiples positifs de 2 nombres entiers a et b, il y a certainement des éléments communs (le produit $a \times b$, au moins, est dans cette liste).

Le Plus Petit des Multiples Communs (non nuls) à deux nombres est appelé, en abrégé, leur PPCM.

On le trouve facilement à partir de la décomposition de a et b en produit de facteurs premiers.

A. 9 Plus grand commun diviseur

Dans la liste des diviseurs de 2 nombres entiers a et b, il y a certainement des éléments communs (le nombre 1, au moins, est dans cette liste).

Le Plus Grand des Diviseurs Communs à deux nombres est appelé, en abrégé, leur PGCD.

On le trouve facilement à partir de la décomposition de a et b en produit de facteurs premiers.

A. 10 L'algorithme d'Euclide

Pour trouver le PGCD de deux nombres entiers a et b ($a > b$), on peut opérer ainsi :

1. Diviser a par b, reste r.

2. Remplacer a par b et b par r.

3. Recommencer 1 et 2. Le dernier reste non nul est le PGCD de a et b.

MAIS OÙ ÇA NOUS SERT TOUT ÇA ?

Comme Monsieur Jourdain, vous utilisez l'arithmétique sans le savoir :

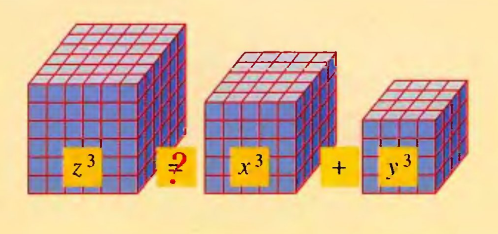
– Connaître les carrés des premiers nombres entiers est bien utile pour travailler sur les surfaces et les racines carrées.

– Reconnaître les diviseurs d'un nombre sert pour découvrir un facteur commun dans une expression à factoriser, ou pour arranger l'écriture d'une racine carrée.

– Trouver le PGCD du numérateur et du dénominateur est utile pour simplifier au plus vite une fraction

– Trouver le PPCM de deux dénominateurs est utile pour trouver le meilleur dénominateur commun dans une addition ou une soustraction de fractions.

Et l'arithmétique est surtout une mine de problèmes dont les énoncés sont à la fois faciles à comprendre par tout le monde et difficiles à résoudre.



La conjecture de Fermat

« Il n'existe pas d'entiers x, y, z et $n > 2$, tels que $z^n = x^n + y^n$. »

Après 350 ans de recherche passionnée, Andrew Wiles vient de livrer enfin (en 1995) la démonstration de cette "conjecture" qui est donc devenue un théorème. Mais vous pouvez peut-être en trouver une démonstration qui tienne moins de 80 pages!

En particulier, ce théorème affirme l'impossibilité de composer deux cubes (de côtés x et y) avec les petits cubes composant un troisième cube (de côté z).



En toute logique

En parcourant l'encyclopédie du Kangourou, vous vous êtes rendu compte qu'il y avait nombre de notions à connaître pour faire des mathématiques. Vous vous êtes rendu compte aussi que ces connaissances étaient logiquement organisées. Nous faisons ici le point sur les règles qui permettent de mieux comprendre cette organisation.

Ensembles et logique

Logique : du grec *logos*, parole.

Ensemble : du latin *in* (dedans) et *similis* (semblable) ; dans un ensemble, on essaie de grouper des choses qui se ressemblent !

Ensemble

Quand les mathématiciens regroupent par la pensée tous les objets qui font ou qui ont le même quelque chose, ils appellent ce regroupement un ensemble et les "objets" en sont les éléments.

Phrases mathématiques

Un texte mathématique a des spécificités, tant sur le plan des mots et des expressions que sur celui de la syntaxe. Nous vous aidons à les repérer pour mieux les comprendre et les utiliser.

L'art de la déduction

S'intéresser à la vérité des phrases énoncées, la prouver ou l'infirmer, c'est le domaine de la démonstration. Voici quelques règles pour bien s'en tirer.

Le loto gagnant

Dans la vie, il est assez utile de savoir raisonner. Prenons par exemple le loto national. J'ai lu dans un journal les conseils suivants :

Si vous êtes du	jouez les numéros	Si vous êtes du	jouez les numéros
Bélier	1 26 21 79 33 99	Balance	35 93 25 75 7 66
Taureau	67 2 78 22 98 34	Scorpion	84 26 92 8 74 16
Gémeaux	20 77 3 97 23 80	Sagittaire	27 85 9 91 15 73
Cancer	76 19 96 4 81 24	Capricorne	70 10 86 14 90 30
Lion	32 95 18 82 5 68	Verseau	11 71 13 87 29 89
Vierge	94 31 83 17 69 6	Poisson	65 12 72 28 88 36

Je suis du Taureau. Elle est du Bélier.
Si elle gagne, le conseil qu'on m'avait donné était mauvais.
Si je gagne, le conseil qu'on lui avait donné était mauvais.
Et si nous ne gagnons ni l'un ni l'autre, ce n'était pas la peine d'acheter le journal...
Dans tous les cas, est-il raisonnable de suivre de tels conseils ?

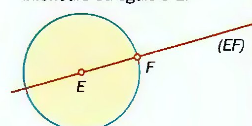
Question subsidiaire : quelle est la probabilité de gagner le gros lot au loto ?

Environ une chance sur quatorze millions !

ENSEMBLES

Au collège, on rencontre principalement des ensembles de nombres (en algèbre) et des ensembles de points (en géométrie).

Ensemble des points situés à une distance de E inférieure ou égale à EF



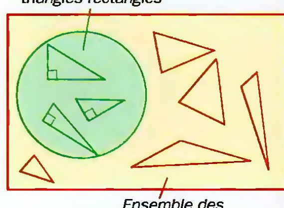
E. 1 Représentations des ensembles en "patates"

Certains ensembles ont une représentation dessinée naturelle : l'ensemble des points d'une droite, l'ensemble des points d'un cercle,... Cependant pour représenter un ensemble (de nombres, de triangles, d'animaux...), on utilise souvent une représentaion dessinée commode : on trace un contour fermé en convenant que tout ce qui est écrit à l'intérieur du contour est élément de l'ensemble et tout ce qui est à l'extérieur ne l'est pas.

E. 2 Inclusion

Quand tous les éléments d'un ensemble A sont éléments d'un ensemble B, on dit que A est inclus dans B (on écrit A⊂ B).

Ensemble des triangles rectangles



Ensemble des triangles

EXEMPLES

Le segment [EF] est inclus dans la droite (EF).

L'ensemble des nombres entiers est inclus dans l'ensemble des nombres décimaux, puisque tous les nombres entiers sont des nombres décimaux. On écrit $\mathbb{N} \subset \mathbb{D}$.

L'ensemble des triangles équilatéraux est inclus dans l'ensemble des triangles isocèles qui est lui-même inclus dans l'ensemble des triangles.

L'ensembles des êtres humains est inclus dans l'ensemble des mammifères.

E. 3 Éléments d'un ensemble

NOTATION : La liste des éléments d'un ensemble est souvent notée en les écrivant entre deux accolades, séparés les uns les autres par des virgules ou des points virgules.

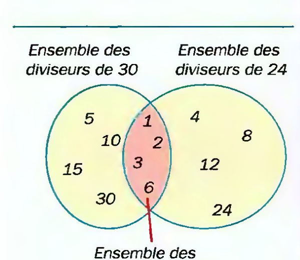
EXEMPLE

L'ensemble des diviseurs de 30 est {1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30}.

E. 4 Le mot "et" et l'intersection

L'ensemble des éléments communs à deux ensembles A et B s'appelle l'intersection des deux ensembles A et B (on écrit A ∩ B).

Ensemble des diviseurs de 30 — Ensemble des diviseurs de 24



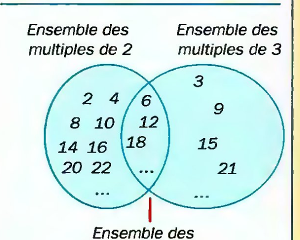
Ensemble des diviseurs de 30 **et** de 24

L'intersection de A et B est donc composée de tous les éléments qui appartiennent à A **et** à B.

E. 5 Le mot "ou" et la réunion

L'ensemble des éléments qui appartiennent à l'un ou l'autre des ensembles A et B s'appelle la réunion des deux ensembles A et B (on écrit A ∪ B).

Ensemble des multiples de 2 — Ensemble des multiples de 3



Ensemble des multiples de 2 **ou** de 3

La réunion de A et B est donc composée de tous les éléments qui appartiennent à A **ou** à B.

Mais attention, quand on dit appartenir à A "ou" à B, cela veut dire appartenir à A ou à B ou aux deux à la fois. Le "ou" des mathématiciens est différent du "ou" exclusif (l'un ou l'autre mais pas les deux) utilisé dans la vie courante.

PHRASES MATHÉMATIQUES

Les phrases des mathématiciens sont un peu différentes de celles du langage courant. Tous les mots, en particulier les petits mots, ont de l'importance . Et certaines formes de phrases se retrouvent souvent dans les énoncés de définitions ou de propriétés.

E. 6 Il existe un élément de... qui...

En mathématiques, quand on dit "il existe un truc qui cloche", c'est qu'on est sûr qu'il y a au moins un truc qui cloche. Mais attention, il peut y en avoir plusieurs.

Pour démontrer qu'une telle phrase est vraie, il suffit d'avoir trouvé un des trucs qui clochent et de pouvoir le montrer.

Pour démontrer qu'une telle phrase est fausse, il faut prouver qu'aucun truc ne cloche, ce qui est souvent plus difficile.

EXEMPLES

Il existe un élément n de $\mathbb{N}$ vérifiant $n + n = n \times n$,

(en fait, il en existe exactement deux : 0 et 2).

Il existe un élément n de $\mathbb{N}$ vérifiant $n \div n = n \times n$,

(en fait, il en existe un et un seul : 1).

E. 7 Pour tout élément de...

Une propriété peut être de la forme "pour tous les éléments d'un certain ensemble, il se passe tel phénomène".

Pour démontrer qu'une telle phrase est vraie, il faut prendre les éléments de l'ensemble un par un, s'il n'y en a pas trop, et pour chacun vérifier le phénomène. Si l'ensemble est infini, il faut des arguments d'une autre nature.

Pour démonter qu'une telle phrase est fausse, il suffit de trouver un élément de l'ensemble pour lequel le phénomène ne se produit pas.

EXEMPLES

Pour tout élément n de $\mathbb{N}$, on a : $n + 0 = n$.

Pour tous réels a et b de $\mathbb{R}$, on a : $a \times b = b \times a$.

E. 8 Les phrases de la forme "Si..., alors...

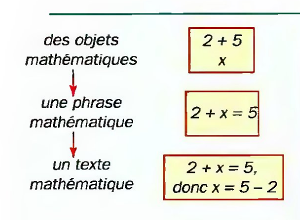
Les phrases de la forme "Si truc alors bidule" ont une importance fondamentale en mathématiques : elles permettent de déduire des résultats nouveaux dans un raisonnement mathématique. Si cette phrase est vraie, alors chaque fois que truc est vrai (soit qu'on l'a déjà démontré, soit qu'on l'a posé en axiome au départ), on peut en déduire que bidule est vrai.

E. 9 La réciproque d'une phrase "Si..., alors...

On appelle phrase réciproque de "Si truc, alors bidule" la phrase "Si bidule alors truc".

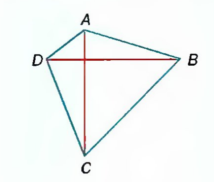
ATTENTION : une phrase et sa réciproque ne disent pas la même chose. Ce n'est pas parce qu'une phrase est vraie que sa réciproque l'est aussi.

Lorsque les phrases "si truc alors bidule" et 'si bidule, alors truc" sont toutes deux vraies, on dit que truc et bidule sont *équivalents*.

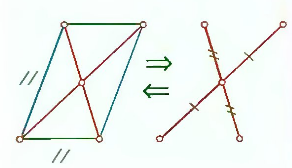




Propriété (I)
Si ABCD est un losange alors ses diagonales sont perpendiculaires.
La réciproque est fausse :



Propriété (II)
Si ABCD est un parallélogramme, alors ses diagonales se coupent en leur milieu.
La réciproque de (II) est vraie : si les diagonales d'un quadrilatère convexe ABCD se coupent en leur milieu, alors ABCD est un parallélogramme.



L'ART DE LA DÉDUCTION

Souvent un exercice de mathématiques consiste à démontrer un résultat. Démontrer, cela signifie établir la vérité d'une certaine propriété à partir d'autres propriétés données dans l'énoncé et des propriétés démontrées précédemment. Les théorèmes ou énoncés en "si... alors..." du cours ont pour rôle de permettre d'affirmer la véracité d'une phrase à partir de la véracité d'une autre.

E. 10 Hypothèses et conclusion

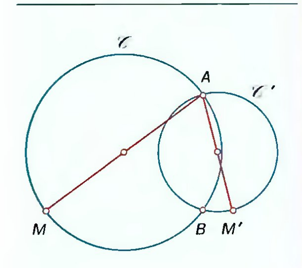
Dans tout exercice de mathématiques, il est demandé de démontrer une proposition. Il faut commencer par repérer les données de l'énoncé.

En mathématiques (contrairement à d'autres sciences où ce mot a une autre signification) on les appelle les **hypothèses**.

EXEMPLE : LES HYPOTHÈSES DONNÉES

Soient deux cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ se coupant en A et B. Les points M et M′ sont diamétralement opposés à A sur $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.

Les hypothèses de cette situation sont résumées dans la figure en marge.



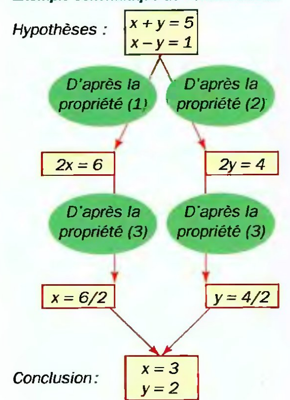
Une fois que l'on sait d'où partir, il faut avoir les idées claires sur l'objectif que l'on veut atteindre, et bien savoir avant de commencer quelle est la **conclusion** cherchée.

C'est souvent facile dans les exercices scolaires, mais moins faciles dans les mathématiques en création, où le chercheur fait une conjecture puis s'emploie à la démontrer.

EXEMPLE : LA CONCLUSION CHERCHÉE

La conclusion où l'on veut aboutir, pour la figure en marge, est que les points M, B et M′ sont alignés.

Exemple schématique de démonstration



Les propriétés utilisées dans cette démonstration sont :

(1) si $a = b$ *et* $c = d$*, alors* $a + c = b + d$

(2) si $a = b$ *et* $c = d$*, alors* $a - c = b - d$

(3) si $ax = b$ *et* $a \neq 0$*, alors* $x = \frac{b}{a}$.

E. 11 Chercher une démonstration

Il n'y a pas de méthode unique pour chercher une démonstration. Il faut bien avoir en tête les résultats du cours qui permettent de déduire de nouvelles propriétés à partir des hypothèses. On peut aussi, à partir de la conclusion, chercher quels sont les moyens dont on dispose pour la démontrer. Bref, on cherche un peu par les deux bouts jusqu'à ce que les choses se rejoignent.

EXEMPLE : LA RECHERCHE

Pour montrer que les trois points sont alignés, on utilise souvent les propriétés des droites parallèles ou perpendiculaires.
Dans la figure considérée, peut-on trouver de telles droites ?
Dès qu'il y a un cercle, il y a des angles droits qui interceptent des diamètres. Voila l'idée ! Les triangles ABM et ABM′ sont rectangles...

E. 12 Rédiger une démonstration

Quelle que soit la manière dont on a trouvé la démonstration, il faut la rédiger dans le bon sens, c'est-à-dire en partant des hypothèses et en arrivant à la conclusion. Chaque chaînon de la déduction doit être justifié par un résultat du cours. Petit à petit, la rédaction va s'alléger des chaînons devenus trop simples, mais au début, il ne faut pas hésiter à être trop complet.

EXEMPLE : LA RÉDACTION D'UNE DÉMONSTRATION

Puisque [AM] est diamètre de $\mathscr{C}$, ABM est un triangle rectangle et $(AB) \perp (BM)$.
Puisque [AM′] est diamètre de $\mathscr{C}'$, ABM′ est un triangle rectangle et $(AB) \perp (BM')$.
Or, par B, il ne passe qu'une perpendiculaire à (AB) : les droites (BM) et (BM′) sont confondues, et les points B, M et M′ sont donc alignés.

Solutions des exercices

THÈME 1

• *Base huit*

Une "clé" est un nombre de 4 chiffres écrit en base huit. Et il y a $8^4 = 4\,096$ tels nombres (en comptant la clé 0000).

• *Le lion est mort ce soir*

Un anti-anti-lion, ou un anti-anti-anti-anti-lion, c'est un lion. 235+120+120=475 lions.

• *Recherche de décimales*

$\frac{1}{7\,000} = 0{,}000\ 142\ 857\ 142\ 857\ldots$

la 4e, $(4+6)^e$, $(4+6996)^e = 7000^e$ décimale est un 1.

La division de 1 par 7 montre que :

$\frac{1}{7} = 0{,}142\ 857 + \frac{0{,}000\ 001}{7}$

d'où $\frac{1\ 000\ 000}{7} = 142\ 857 + \frac{1}{7}$

et $1\ 000\ 000 = 142\ 857 \times 7 + 1$.

D'où $142\ 857 \times 7 = 999\ 999$.

Les autres résultats en découlent.

• *Portions de carrés*

$A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{2}$ (tracer une diagonale du carré pour s'en convaincre), $C = \frac{1}{2}$, $D = \frac{1}{2}$.

• *Découpage de carrés*

Côté = $\sqrt{2}$.

• *L'habit ne fait pas le moine*

$\sqrt{1\ 024} = 32$.

$\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2} - (\sqrt{2}+1) = -1$.

$\frac{102}{17} = 6 : \frac{1\ 001}{7 \times 11 \times 13} = 1$.

• *Des pieds à la tête*

$(5+a)(5+b) = 25 + 5a + 5b + ab$
$= 10(a+b) + (5-a)(5-b)$

THÈME 2

• *Les surprises des nombres*

111 111 111/9 = 12 345 679 (sans le 8)
1234567900987654321.

Le ? est un 5 (et non pas un 4).

$5^{33} \times 2^{33} = 10^{33}$.

• *Choix d'un menu*

Il y a $3 \times 4 \times 2 \times 3 = 72$ repas possibles.

• *Un nœud pour matheux*

	6	4	
1			1
	3	4	

• *Addition possible ?*

La disposition des nombres à additionner n'aide en rien le calcul.

• *La tornade opératoire*

En numérotant les 16 lignes : 1, 10, 8, 5, 13, 14, 7, 4, 2, 12, 16, 9, 6, 3, 11, 15.

• *Elibéd ?*

$(3\,000 + 2 \times 350 + 6 \times 3) \times 100 + 30 = 371\,830$ = DÉBILE.

• *Somme constante*

Première question facile : on place le zéro au centre et deux nombres opposés sur le même diamètre.

Deuxième question : à partir de la solution de la première, on ajoute 2 à chaque nombre placé.

• *Nombres croisés*

	−1	1	−1
	−1	−1	1
	1	−1	−1
ou	−1	−1	1
	1	−1	−1
	−1	1	−1

• *Caen*

$\frac{2}{3} \times 7 \times \frac{3}{4} = \frac{7}{2} = 3{,}5 > 3$. Non.

• *À calculer*

Résultat $\frac{5}{8}$.

• *Approximations*

$\sqrt{40} \approx 6{,}3$; $\sqrt{700} \approx 26{,}4$; $\sqrt{70} \approx 8{,}3$.

• *Rectangle*

Le rectangle est carré :

$\sqrt{125} - \sqrt{5} = 5\sqrt{5} - \sqrt{5} = 4\sqrt{5}$.

$\sqrt{245} - \sqrt{45} = 7\sqrt{5} - 3\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$.

L'aire du carré est $80 = (4\sqrt{5})^2$.

• *Écrire en puissances de dix*

$10^3 \times 10^9 \times 10^3 = 10^{15}$ sabords.

• *La légende de Séta*

Sachant que $2^{10} \approx 10^3$, on en déduit que $2^{60} \approx (10^3)^6 = 10^{18}$.

2^{63} vaut $2^3 \times 2^{60}$, soit environ 8×10^{18}, soit près d'une dizaine de milliards de milliards.

THÈME 3

• *Voici la liste des fruits, de haut en bas*

abc, $ab + c$, $ab - c$, $a + bc$, $a + b + c$, $a + b - c$, $a - bc$, $a - b + c$, $a - b - c$.

• *Fais-moi signe*

Signe – devant d et devant f.

• *Troublante affaire*

$AB^2 + AC^2$ n'est pas égal à $(AB + AC)^2$.

• *Un gros produit*

$n = 3\ 689$.

$(n-2)(n+2) = n^2 - 4$

$(n-100)(n+100) = n^2 - 10\ 000$

$(n - 3\ 000)(n + 3\ 000) = n^2 - 9\ 000\ 000$.

Les 3 résultats sont donc 13 608 717 ; 13 598 721 ; 4 608 721.

• $102 \times 98 = 10\ 000 - 4 = 9\ 996$.

$(x+1)(x-1) = x^2 - 1$.

$2y + 1 = (y+1)^2 - y^2$.

• $(a+b+c)(x+y) = ax+bx+cx+ay+by+cy$. 6 termes.

• *Drôle de champs*

Les deux champs ont pour aire $36\,x^2$.

• *Les nombres figurés*

$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

• *Additions malicieuses*

Ces solutions ne sont pas les seules…

ROUE=4653 VELO=9306
MEGA=4190 GIGA=9590 EXTRA=13780
FAN=943 CLUB=6205 STAR=7148
PERE=4030 MERE=2030 BEBE=6060
MOI=836 TOI=536 NOUS=1372
HUIT=8253 SEIZE=16506
NUIT=8531 LIT=731 REVE=9262
DEUX=1329 NEUF=6324 ONZE=7653
SIX=927 CINQ=5213 ONZE=6140
ALEA=6746 JACTA=86916 EST=401
CESAR = 94063
OEIL=1043 YEUX=2086
UN=35 SIX=210
HOMME=35771 FEMME=61771
AMOUR=97542
MANGER=536140 MANGER=536140
GROSSIR=1072280
UN=34 PEU=823 FOU=193 FADA=1050

THÈME 4

• *César* : −2 (IV), 1 (IV), $\frac{3}{4}$ (V) et 1,2 (III).

• *Circuit*

$x = 9$, $y = 3$, $z = 2$, $t = 4$ et $u = -3$.

• *La poursuite infernale*

$t = 2\ 160$ s = 36 min.

• $x^2 = 2x$, soit $x(x-2) = 0$; x est 0 ou 2.

• $(x+2)^2 = (2x+1)^2$; x est 1.

• *Vexé*

$(x+1)^2 = x^2 + 15$ ou

$(x+1)^2 - x^2 = 2x + 1 = 15$, $x = 7$.

• *Rectangle*

En développant $(x+2)^2 - (x+1)^2 - x^2$, on trouve $x^2 - 2x - 3$; en développant $(x+1)(x-3)$ aussi.

L'équation a pour solution – 1 (qui est à rejeter pour une distance) et 3. Les côtés du triangle sont 5, 4 et 3.

• *Systèmes*

Sans solution : (IV) ; infinité de solutions : (I) ; (0 ; 0) solution de (II) et de (V) ; (0 ; 3) est solution de (III).

• *Des pattes, des pattes*

$r = 12$ et $k = 15$.

• ***La balance***
$b = 15$ kg, $d = 125$ kg, $f = 20$ kg.
• ***En famille***
J'ai 12 ans.
• ***Moyenne***
La vitesse moyenne est 24 km/h.
• ***Deux verres ça va***
$p = 0{,}04\ \ell = 4$ cℓ et $v = 12$ cℓ.
• ***Aires égales***
$L \times 21 = 10{,}5 \times (30 - L)$, d'où $L = 10$.
• ***Une logique implacable***
Le Père Noël a divisé par $x - y - z$ qui vaut zéro.
La déduction : "si $x^2 + x + 1 = 0$ alors $3 = 0$ est juste". La conclusion à tirer est qu'il n'existe aucun nombre réel vérifiant $x^2 + x + 1 = 0$.
• ***A + X = B***
Célérifère 1790, Villers-Cotterets 1539, Olybrius 472, Jeux Olympiques 676 av. J.-C.
• ***Message secret***
BRAVO C'ÉTAIT DIFFICILE.

THÈME 5

• ***La lumière du Soleil***
150×10^6 km en 500 s, soit 300 000 km en 1 seconde.
• ***Hurrah !***
$\frac{4}{3}$ de seconde.
• ***Gruyère***
La première proposition traduit une proportionnalité, la seconde une soustraction. Les deux opérations ne sont pas réciproques.
• ***Record de l'Atlantique***
4 800 km en 252 h soit 19 km/h environ, ce qui fait un peu plus de 10 nœuds.
• ***Poules***
4 poules pondent 2 œufs en 4 jours.
• ***Des hauts et des bas***
Hausse puis baisse : $\times 0{,}9$ puis $\times 1{,}1$ donc $\times 0{,}99$, soit une baisse de 1 %.
Baisse puis hausse : $\times 1{,}1$ puis $\times 0{,}9$, c'est pareil.
• ***Jeux de l'oie***
Cases 1,2,3 : Julien et André sont au même prix.
Case 4 : 125 F.
Case 5 : $0{,}8 \times 0{,}9 = 0{,}72$, la remise est de 28 %, les vendredis 13.
Case 6 : 1,18. Les prix augmentent d'un lundi à l'autre, de 6,3 %
Case 7 : non, 1 % de moins.
Case 8 : a et b sont les longueurs des 2 bras de la balance.
Première pesée $ax = b$, soit $x = \frac{b}{a}$.
Deuxième pesée : $by = a$, soit $y = \frac{a}{b}$.
Donc $x + y = \frac{b}{a} + \frac{a}{b} = \frac{a^2 + b^2}{ab}$ qui ne vaut 2 que si $a = b$.
Le marchand y perd car $x + y > 2$, quelles que soient les longueurs a et b. En effet, $a^2 + b^2 > 2ab$, puisque $a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2$ est toujours positif.

THÈME 6

• ***Le chemin de la bibliothèque***
Il y a 2 chemins possibles : 8,15 ; 8,2 ; 9,01 ; 9,10 ; 9,11 ; 9,2 ; 9,81 ; 12 ; ou 8,15 ; 8,2 ; 9,01 ; 9,10 ; 9,11 ; 11,10 ; 11,5 ; 12. Et on ne peut pas tourner en rond.
• ***Mise en sac***
Entre 5 kg et 5,35 kg.
• ***Le poids des mots***
Entre 2,4 kg et 2,8 kg.
• ***Ordre et soustraction***
$a - d < b - c$, mais rien ne peut être dit sur $a - c$ et $b - d$.
• ***En vélo***
Entre 3 h et 4 h.
• ***Encaissement***
Entre 500 et 1 000 caisses.
• ***Quotidien***
$22 \times 0{,}36 \times 0{,}28 \times 200\,000 \times 365 \times 40$ m$^2 \approx 6\,475$ km^2.
C'est à peu près un département français.
• ***Arrondi de troncature***
Entre 1,595 m et 1,694 m.
• ***Un exercice très difficile***
En séparant l'étude par $x < 1$ et $x \geqslant 1$, on trouve $x \geqslant 3$.
• ***Projet de réforme***
Les années 4000, 8000, 12000... ne devraient pas être bissextiles. Ni même 200004, 400004, 600004...

THÈME 7

• ***Tempête à Météo-Flash***
1. Afrique tropicale 2. France 3. Russie 4. Plateaux andins.
• ***Fonctions ?***
Sont des fonctions : *a*), *c*), *f*).
• ***Escargot***
Vitesse : 8 m/h.
• Vitesse de la marcheuse : 4,32 km/h. Quant à l'ours, il dort (vitesse 0), et le TGV parcourt tant de mètres en 20 secondes que la représentation graphique de son mouvement est quasi-verticale.
• ***La course folle***
B n'a pas zigzagué mais s'est arrêté deux fois (crevaisons ?) et a été le plus régulier en roulant ; c'est lui qui a gagné. C a fait la course en sens inverse et D était sûrement un extraterrestre : dans un temps nul, il arrive à parcourir une certaine distance.

THÈME 8

• ***La cryptographie***
Les mathématiques sont le langage de l'univers.
La roche tarpéienne est près du capitole !
• ***Exercice de statistiques***
Le calcul fait représente l'âge moyen des 100 élèves étudiés. Nous n'avons aucune interprétation possible en termes de couleur de cheveux.
• ***Notes au fil du temps***
Si on n'a pas les conventions habituelles de sens sur les axes, il faut réviser ses modes d'interprétation habituels.
• ***Pourcentages à vue d'œil***
Unité pour l'union : environ 20°, soit à peu près 10 %.
Extrème Centre : environ 120°, soit 66%.
Union pour l'unité : environ 40°, soit à peu près 20%.
• ***L'aire de rien !***
Pour les angles :
$\frac{29}{360} \approx 8\%$. $\frac{76}{360} \approx 21\%$. $\frac{255}{360} \approx 71\%$.
Pour les couronnes circulaires :
aire jaune $= 0{,}36\pi$
aire rose $= (1{,}1^2 - 0{,}6^2)\pi = 0{,}85\pi$
aire verte $= (2^2 - 1{,}1^2)\pi = 2{,}79\pi$
$\frac{70{,}8}{2{,}79} = 25{,}4$; $\frac{21{,}2}{0{,}85} = 24{,}9$; $\frac{8}{0{,}36} = 22{,}2$.
Les aires sont presque proportionnelles aux fréquences statistiques.
• ***La bonne pointure***
La moyenne des pointures n'est pas l'indicateur qu'il faut à M. Chausson. Il vaudrait mieux qu'il connaisse le mode (la pointure la plus vendue).
• ***Le Nabab Heloued***
Si f est la fortune du Nabab et de sa femme, on a, en utilisant les données sur sur les moyennes, $\frac{8\,000 \times 10\,000 + f}{10\,002} = 10\,000$.
D'où $f = 20\,020\,000$ roupies.
En utilisant les données sur les médianes, on conclut qu'il y a un sujet et un seul qui possède entre 5 000 et 6 000 roupies.

THÈME 9

• *Pair-impair*

a) Les droites de même parité sont parallèles entre elles ; les droite de parité différentes sont perpendiculaires entre elles.
b) C'est le contraire.

• *Vitrier*

2 directions, 3 directions, 2 directions, 4 directions, 3 directions, 3 directions ; ce qui donne les prix suivants, dans l'ordre : 10000 F, 15000 F, 10000 F, 20000 F, 15000 F et 15000 F.

• *Dessiner avec des perpendiculaires*

Illustration du théorème : “Si AMB est rectangle en M, M appartient au cercle de diamètre [AB]”.

• *Les trois menteurs*

Soit A, B et C les maisons d'Arthur, Benoît et Claude. Une et une seule des affirmations de Benoît est vraie : BC=3 ou BC=AB. Donc AB≠3. Et Arthur dit vrai quand il dit AB=2. BC vaut donc 2 ou 3, et avec les affirmations de Claude on est alors sûr que AC=5. BC=2 est à éliminer (ne satisfait pas l'inégalité triangulaire). Donc AB = 2 ; BC = 3 ; AC = 5.

• *Pompéi*

La première éruption n'atteint pas la route, la deuxième tout juste (tangente) et la troisième l'a coupée.

• *Football*

On doit se placer sur les 3 médiatrices du triangle formé (elles sont concourantes : voir Thème 11).

THÈME 10

• *Téléviseur*

BC = $\sqrt{2602,12} \approx 51$ cm.

• *Échelle*

$h = \sqrt{24} \approx 4,9$ m.

• *Le puits*

$\frac{p}{1,5} = \frac{1,2}{1}$, d'où $p = 1,8$ m.

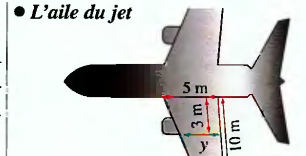
• *Théorème de Thalès*

Figure A :
$\frac{y}{2} = \frac{2}{3}$, donc $y = \frac{4}{3}$. $\frac{x}{3} = \frac{3}{2}$, donc $x = \frac{9}{2}$.
Figure B :
$\frac{y}{4} = \frac{2}{3}$, donc $y = \frac{8}{3}$. $\frac{x}{y} = \frac{4}{3}$, donc $x = \frac{32}{9}$.

• *64 = 65*

On n'a pas $\frac{FG}{DG} = \frac{BC}{DC}$ ($\frac{3}{8}$ et $\frac{5}{13}$).
La figure serait correcte si $\frac{FG}{8} = \frac{5}{13}$, soit FG ≈ 3,077.

• *L'aile du jet*



Calcul de x : $\frac{x+10}{5} = \frac{x}{1}$, donc $x = 2,5$ m.
Et y : $\frac{y}{(10+x)-3} = \frac{5}{10+x}$ ou $\frac{y}{9,5} = \frac{5}{12,5}$ et $y = 3.8$ m.

• *Tripler*

Si OA′ = 3OA, OB′ = 3OB, OC′ = 3OC, OD′ = 3OD, A′B′C′D′ aura la propriété voulue.

• *À 5 cm*

Réponse oui pour le triangle (il y a proportionnalité entre les mesures des côtés du petit et du grand triangle). Non pour le rectangle : $\frac{L-10}{l-10} \neq \frac{L}{l}$ en général.

• *Rapport d'aires*

OBCD est un agrandissement de AIOJ à l'échelle 2 puisque DC = 2AI. Son aire est égale à 4 fois l'aire de AIOJ.

THÈME 11

• *Angles égaux*

Ce sont des angles alternes-internes ou correspondants déterminés par des droites parallèles (grâce à l'énoncé 11-6).

• *Maison*

Il faut la placer sur l'intersection des trois bissectrices du triangle.

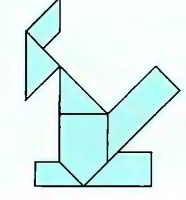
• *Logos*

American Association : triangles et trapèzes isocèles. Aluminium Company : losanges et triangles isocèles. Mitsubishi : losanges et triangles équilatéraux. Jack Beck : triangles isocèles rectangles. Ministère du logement : triangles équilatéraux.

• *Hexagones*

Vingt.

• *To Dong*



• *Polygones réguliers*

Pour $n = 3$, angle = 60°.
Pour $n = 4$, angle = 90°.
Pour $n = 5$, angle = 108°.
Pour $n = 6$, angle = 120°.
Pour $n = 7$, angle ≈ 128°.
Pour $n = 8$, angle = 135°.

• *Les pavages de Platon*

$p \times 180 \times \frac{n-2}{n} = 360$.
Soit $p(n-2) = 2n$, soit $pn = 2n + 2p$ d'où $\frac{1}{2} = \frac{1}{p} + \frac{1}{n}$ (en divisant par $2np$).
$n \geqslant 3$ il faut un polygone.
Si $n > 4$ et $p > 4$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{n} < \frac{1}{2}$.
D'où les seules possibilités :
$n = 3$; $p = 6$. $n = 4$; $p = 4$. $n = 6$; $p = 3$.

• *La jungle des triangles*

Rouge : triangle rectangle.
Bleu et vert : triangle isocèle.
En E : triangle équilatéral.
En I : triangle rectangle isocèle.
Les limites de la forêt : la frontière du quadrilatère colorié.
Deux points correspondent au fameux triangle quelconque (longitude : 75°, latitude : 45° ou 60°).

THÈME 12

• *Chercher l'astuce*

En traçant la parallèle à [Ax) passant par le sommet de l'angle cherché, on partage α en deux angles, l'un de 37° et l'autre de 180−123=57°. D'où $\alpha = 94°$.

• *Parallèles*

$d_1 // d_2$. D_1 n'est pas parallèle à D_2. x=80°.

• *Angles à calculer*

$x = 15°$. $z = y = 75°$.
$x = 90°$. $y = 60°$. $z = 30°$.

• *Les audaces de XY*

Les angles adjacents d'un parallélogramme sont supplémentaires. Leurs moitiés sont donc complémentaires. Le triangle formé par leurs bissectrices est donc rectangle. XY a raison.

• *Rebondissements*

x et y sont des angles inscrits interceptant 2 arcs de cercles dont les angles au centre sont égaux (opposés par le sommet).

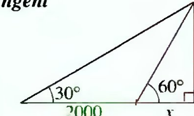
• *Bissectrices*

$\widehat{AEC} = 45°$ (angle inscrit interceptant un quart de cercle). (EC) est donc la bissectrice cherchée. De même pour (EB).

• *Angle* $\alpha = 5.7°$.

• *Dénivellation* $h = 17,6$ m.

• ***Paradis***
AC = 45 × tan 75° ≈ 167.9 m < 200 m.
• ***Tour de Pise***
$d = \dfrac{55}{\tan 85°} \approx 4.81$ m.
• ***Tangent***



$h = x \tan 60° = (x+2000) \tan 30°$. D'où :
$\sqrt{3}x = \dfrac{x+2000}{\sqrt{3}}$; $3x = x+2000$; $x = 1000$.
$h = 1000\sqrt{3}$. $h < 1800$ m.
Le pic est au-dessous de 3800 mètres.
• ***Équarrir***
Le volume perdu est proportionnel à l'aire de la section.
Aire perdue $= \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2} \approx 0.28$.
(10 % de $\dfrac{\pi}{4}$) ≈ 0.08 : il a tort.
• ***Triangle équilatéral***
$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
• ***Pente***
45 % donne un angle de 24° environ,
45° donne une pente de 100%.

THÈME 13

• ***Un bon patron***
D et peut-être A (solide plat).
• ***Cubes***
Le dessin 4 ne représente pas un cube.

THÈME 14

• ***Cocottes***
Une symétrie centrale transforme $\mathscr{C}$ en $\mathscr{C}''$.
Une translation transforme $\mathscr{C}$ en $\mathscr{C}_2$.
• ***Lettres***
Dans une symétrie centrale, les lettres ne changent pas de forme. Dans une symétrie orthogonale, A, E et X gardent la même forme.
• ***Horreurs***
Voici, ci-contre et schématiquement, les horreurs de l'exercice.

1 2 3 4 5 6 7

2 est image de 1 dans une symétrie orthogonale. De même que 4.
3 est image de 1 dans une rotation.
5 est image de 1 dans une translation.
6 est image de 1 dans une rotation.
• ***À la règle***
(AB) coupe D en M. B′ est sur (MA′).
(BA′) coupe D en N. B′ est sur (AN).
B′ est à l'intersection de (MA′) et (AN).
• ***La tête qui tourne***
Soit A et A′ les deux yeux droits, O et O′ les deux yeux gauches. Le centre Ω de rotation est à l'intersection des médiatrices de [AA′] et de [OO′]. L'angle est $\widehat{A\Omega A'}$.
• ***Hexagone régulier***
Deux triangles équilatéraux se correspondent par une symétrie orthogonale, par une rotation de centre O et pour certains aussi par une translation.
• ***Exercice basique***
Symétrie centrale : elle a pour centre le point d'intersection de d_1 et d_2.
Symétrie orthogonale : une par rapport à chacune des deux bissectrices.
Rotation : deux rotations en général.
Translation : non.
• ***Marché aux puces***
A : 21 F *B* : 41 F *C* : 10 F
D : 21 F *E* : 1 F *F* : 0 F
Une puce ronde n'a pas de prix !

THÈME 15

• ***Avis de recherche***
2 représentants : exemple $\overrightarrow{DC}$.
3 représentants : exemple $\overrightarrow{AC}$.
6 représentants : exemple $\overrightarrow{AB}$.
• ***SNCF***
Quatre égalités vectorielles traduisent les huit noms d'un même parallélogramme.
• ***Le mot caché***
Le mot est "OK".
• ***Graduation***
Les points marqués de B à A ont pour abscisses 6, 4, 2, 0 et −2. L'origine est donc le point marqué à gauche de A et l'unité est le huitième de AB.
• ***Trouver le repère***
(D,C,I) ou (B,C,A) *p.* 162. (B,C,A) *p.* 163.
• ***Où ?***
Tous les points sont sur le cercle de centre l'origine et de rayon 5.
• ***Le carré chinois***
$\overrightarrow{AB}(4\,;3)$; $\overrightarrow{BC}(3\,;-4)$; $\overrightarrow{CD}(-4\,;-3)$; $\overrightarrow{DA}(-3\,;4)$. AB = BC = CD = DA = 5.
• ***Six droites***
Équation 1 : droite d_3. Équation 2 : droite d_1.
Équation 3 : droite d_4. Équation 4 : droite d_5.
Équation 5 : aucune droite.
Équation 6 : droite d_6.
Équation de d_2 non donnée.
• ***Sur le cercle***
a) Pentes : 1, −1, $\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$.
b) Pentes : $-\sqrt{3}$, 0, $\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$, 0, $\sqrt{3}$.
c) Le produit des pentes vaut −1 (⊥) ou les pentes sont égales (//).
• ***Jeux de pistes***
1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55.
Pour parcourir 100 carreaux en ligne droite, il faut au minimum 14 coups.
Après un déplacement de 6 carreaux d'un coup, on peut freiner en 15 carreaux.
• ***Pentes à gogo***
La progression des angles n'est évidemment pas régulière.
Les équations des droites passant par B sont $y = \dfrac{n}{5}x + 10 - n$, pour $n = 0, 1, 2, \ldots, 10$.
Deux droites passant par A et deux droites passant par B (de mêmes *n*) forment des parallélogrammes.

THÈME 16

• ***Sauts de puces***
Les deux trajectoires sont de même longueur.
• ***Puits***
La ligne de partage est la droite passant par le puits et le centre du rectangle. Les deux parties ainsi obtenues sont d'aires égales pour cause de symétrie centrale.
• ***La part du gâteau***
90 g.
• Par Pythagore dans le triangle rectangle AMO, avec M milieu de [AB] et O centre des cercles, la différence des carrés des rayons vaut 100. Aire ≈ 314 cm².
• ***Lunules***
Soit *a*, *b* et *c* les mesures des côtés du triangle rectangle, *c* étant l'hypoténuse.
L'aire totale *A* de la figure est :
$\dfrac{\pi a^2}{8} + \dfrac{\pi b^2}{8}$ + *aire du triangle*.
L'aire des lunules est :
$A - \dfrac{\pi c^2}{8}$ = *aire du triangle* $+ \dfrac{\pi}{8}(a^2+b^2-c^2)$
c'est donc l'aire du triangle.
• ***Pluie***
Surface de base du cylindre : 81π.
Surface de base du prisme : 35 (l'eau y montera le plus haut).
Surface de base du parallélépipède : 200.
• ***Plouf***
$36\pi \times 1 = \dfrac{4}{3}\pi r^3$. D'où $r = 3$ cm.
• Si le cube mesure 1, la sphère mesure $\dfrac{4}{3}\pi\left(\dfrac{1}{2}\right)^3 = 0.5236$. Plus de la moitié !
• ***Calcul d'aires***
C, D, B, C, E.

Symboles & formules

Objets géométriques

(MN)	la droite passant par les points M et N.
[AB]	le segment d'extrémités A et B.
[OA)	la demi-droite d'origine O passant par A.
EF	la distance entre les points E et F.
$\overrightarrow{IJ}$	le vecteur $\overrightarrow{IJ}$.
$\widehat{AOB}$	l'angle de sommet O et de côtés [OA) et [OB).

Notations usuelles

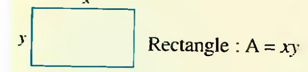
- $f : E \rightarrow F$ — f est une fonction. E est son ensemble de départ, et F est son ensemble d'arrivée.
  - $x \mapsto y$ — L'image de x est y.
  - $f(x) = y$ — L'image de x par la fonction f est y.
- Dans un repère (O, I, J) :

  M(x, y) — M a pour coordonnées (x ; y).

Formules d'aire : polygones



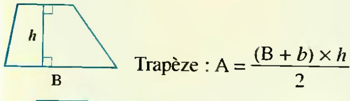
Carré : $A = a^2$



Rectangle : $A = xy$



Triangle : $A = \dfrac{x \times h}{2}$

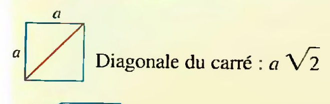


Trapèze : $A = \dfrac{(B + b) \times h}{2}$

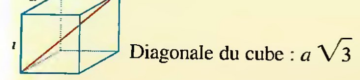


Parallélogramme : $A = x \times h$.

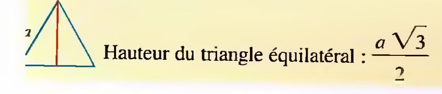
Longueurs utiles



Diagonale du carré : $a\sqrt{2}$



Diagonale du cube : $a\sqrt{3}$

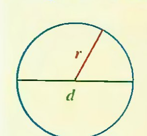


Hauteur du triangle équilatéral : $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Verbes mathématiques

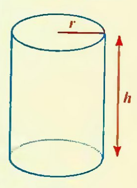
$=$	est égal à
$<$	est strictement inférieur à
$>$	est strictement supérieur à
$\leqslant$	est inférieur ou égal à
$\geqslant$	est supérieur ou égal à
$\neq$	n'est pas égal à
$//$	est parallèle à
$\perp$	est perpendiculaire à
$\in$	est élément de
$\notin$	n'est pas élément de

Objets ronds

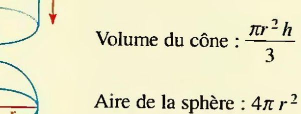


Longueur du cercle : $2\pi r = \pi d$

Aire du disque : πr^2



Volume du cyclindre : $\pi r^2 h$

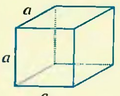


Volume du cône : $\dfrac{\pi r^2 h}{3}$

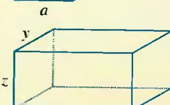
Aire de la sphère : $4\pi r^2$

Volume de la boule : $\dfrac{4}{3}\pi r^3$.

Formules de volumes : polyèdres



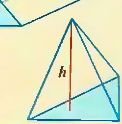
Cube : $V = a^3$



Pavé : $V = xyz$



Prisme : V = aire de la base × h



Pyramide : $V = \dfrac{\text{aire de la base} \times h}{3}$

INDEX

CORRECTION DES TESTS : BONNES RÉPONSES

Chacun de ces tests équivaut à 50 questions ; et ce ne sont pas 50 petites questions à réponses simples, genre "quizz". Si vous y réussissez, c'est que vous possédez vraiment les savoirs du chapitre correspondant.

Test 1. 1 A.D. 2 A.C.D. 3 C. 4 A.C.E. 5 C.D. 6 A.B.D. 7 A.B.D. 8 A.C.D. 9 C.D.E. 10 D.
Test 2. 1 A.C.E. 2 A.C. 3 B.E. 4 E. 5 A.D.E. 6 A.C. 7 B.D.E. 8 C.E. 9 C. 10 C.
Test 3. 1 A.E. 2 D. 3 D. 4 C.E. 5 A.C. 6 B.D.E. 7 E. 8 D. 9 E. 10 A.B.
Test 4. 1 C. 2 B.E. 3 A.C. 4 C.D.E. 5 A.C.D. 6 C. 7 B.D. 8 C.E. 9 B.D. 10 D.
Test 5. 1 B.D.E. 2 B.D.E. 3 A.D. 4 E. 5 B.E. 6 B.E. 7 D.E. 8 D. 9 A.C.D.E. 10 B.C.E.
Test 6. 1 D.E. 2 A.C.E. 3 C.E. 4 A.B. 5 A. 6 D.E. 7 A. 8 C.E. 9 A.D.E. 10 B.D.E.
Test 7. 1 B.D. 2 C.D. 3 D.E. 4 D. 5 E. 6 E. 7 B. 8 A.B.D. 9 A.B.D. 10 A.
Test 8. 1 A.C.E. 2 C.E. 3 E. 4 C.E. 5 B. 6 D. 7 D. 8 C. 9 D. 10 A.
Test 9. 1 B.D.E. 2 A.B.D. 3 A.D. 4 B.C. 5 B.C.E. 6 E. 7 A. 8 C. 9 D. 10 B.D.
Test 10. 1 A.B. 2 C.D.E. 3 C.E. 4 C. 5 A.C.D. 6 B.E. 7 A.B. 8 A.C.D. 9 B.E. 10 A.B.C.D.E.
Test 11. 1 A.B.D. 2 C.E. 3 A.B. 4 D. 5 A.B. 6 B.C.D.E. 7 C. 8 D.E. 9 A.C.E. 10 A.C.E.
Test 12. 1 A.C.E. 2 A.C. 3 C. 4 B.E. 5 A.B.D.E. 6 B.C.E. 7 B.E. 8 B.C.E. 9 B.E. 10 D.
Test 13. 1 A.C.E. 2 A.B.C.D. 3 C.D. 4 B. 5 A.B.C.D. 6 B.C.E. 7 A.E. 8 C.E. 9 A.B.D. 10 A.B.E.
Test 14. 1 A. 2 B.D.E. 3 A.B.C.E. 4 E. 5 B.C.E. 6 B.D.E. 7 A.C.E. 8 A.D. 9 B. 10 A.
Test 15. 1 D.E. 2 D.E. 3 B.D.E. 4 A.C.E. 5 C. 6 B.C. 7 D. 8 D.E. 9 D. 10 D.
Test 16. 1 B.D. 2 C. 3 B. 4 D.E. 5 A.B.D.E. 6 C.D.E. 7 C. 8 E. 9 E. 10 B.

Les mathématiques du collège en 192 pages :

- **tous les théorèmes, les définitions et les propriétés à connaître**
- **des exemples intéressants, des exercices amusants, des tests pertinents**
- **des conseils de méthode et des savoir-faire astucieux.**

Mais aussi :

- **des précisions sur la signification du vocabulaire mathématique**
- **des petites histoires de la grande histoire des mathématiques**
- **des situations de la vie quotidienne éclairées par les mathématiques (et réciproquement !)**
- **des pages "magazine" pleines de malice et d'esprit "Kangourou" qui rendent les mathématiques vivantes, ouvertes et passionnantes.**

ISBN 2-87694-026-4